

Cvičení 9: Průběh funkce

1 Extrémy

Najděte extrémy funkcí pouze pomocí kalkulačky

- (a) $2 \sin(2x) + 2x$ na $[0, 4]$,
- (b) $x^2 e^{-x}$ na \mathbb{R} .

2 Průběh

Načtrněte grafy následujících funkcí

- (a) $\frac{\sin(x)}{x}$,
- (b) e^{-x^2} ,
- (c) $e^{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$,
- (d) $\sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}$,
- (e) $\arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$,
- (f) $1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{3+x}}$.

3 Optimalizace

3.1 Zaměstnanci

Představte si, že jste ředitel(ka) firmy, která zaměstnává N lidí. Každému zaměstnanci platíte 30 000 Kč měsíčně.

- (a) Každý zaměstnanec vyprodukuje firmě zisk 120 000 Kč měsíčně. Jaký je optimální počet zaměstnanců, který ve firmě mít?
- (b) Realističtější model je takový, ve kterém s větším počtem zaměstnanců efektivita celé skupiny neroste lineárně. To může být způsobeno tím, že je třeba mezi sebou komunikovat a čekat na výsledky jiných zaměstnanců. Použijeme tedy přiblížení, že výdělek firmy roste s odmocninou počtu zaměstnanců, tedy $120\,000\sqrt{N}$. Jaký je optimální počet zaměstnanců?
- (c) Máte možnost najmout zkušeného manažera, který zvýší efektivitu zbytku zaměstnanců. Manager tvrdí, že je schopen docílit výdělků $120\,000 N^{\frac{3}{5}}$, ale bude Vás stát dalších 200 000 Kč měsíčně. Vyplatí se takového manažera najmout, pokud můžete rovnou najmout podle potřeby i další zaměstnance?

3.2 Politika

Jste politikem, který má řídit zemi v průběhu virové pandemie. Virus se rychle šíří populací, což Vaši přední poradci modelují pomocí funkce

$$i = \frac{I}{N} = \frac{1}{1 + e^{-\beta(t-5)}},$$

kde I je počet infikovaných lidí, N celkový počet lidí v zemi, t je čas od propuknutí epidemie v zemi¹ měřený v měsících a β je parametr. Pomocí zavedení různých opatření můžete nastavit $\beta \geq 0$.

- Za každého nakaženého budete mít výdaje za péči v nemocnicích ve výši Z . Přísnější opatření však omezí lidem možnost pracovat a tak stát získá na daních pouze $\frac{D}{1+\beta^2}$, kde D je obnos, který by normálně stát vydělal za půl roku. Jak optimálně nastavit β , aby stát vydělal za půl roku po propuknutí epidemie co nejvíce? Stačí vyjádřit příslušnou rovnici, ze které dostanete optimální hodnoty. Na dosazení a dopočítání máte lidi.
- Za půl roku budou též volby, které chcete vyhrát. Vaši poradci tvrdí, že vysoký počet nakažených se negativně projeví na Vašich preferencích, což kvantifikují pomocí I . Zároveň ale příliš tvrdá opatření též nedoporučují, protože ta se v jejich modelu projeví pomocí β . Jak optimálně nastavit přísnost opatření, abyste maximalizovali svoje šance na výhru ve volbách? V těchto důležitých věcech svým lidem nevěříte a výsledky si chcete ověřit sami.

3.3 Plechovka

Vášim úkolem je navrhnout plechovku, kterou má použít nová značka přeslazeného bublinkového nápoje. Plechovka musí mít válcovitý tvar a objem $0.3l = 3 \times 10^{-4} m^3$. Stěny plechovky jsou z tenkého hliníku a stojí $1 \frac{\text{Kč}}{\text{cm}^2}$. Podstavy se vyrábí z tlustšího plechu a stojí $3 \frac{\text{Kč}}{\text{cm}^2}$. Navrhněte plechovku, která bude nejlevnější na výrobu s daným objemem.

¹Technicky tohle není pravda. V tomhle modelu začala epidemie před nekonečně dlouhou dobou, jak je vidět z limity. To ale budeme ignorovat a budeme věřit, že tohle je vážně dobrá formulka pro modelování počtu nakažených za t měsíců.

4 Užitečné vztahy

Pro funkce $f \in C^1$ platí,

- (a) $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ je rostoucí v bodě x ,
- (b) $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ je klesající v bodě x ,
- (c) $f'(x) = 0 \Rightarrow f$ má v bodě x lokální extrém.

Pro funkce $f \in C^2$ platí,

- (a) $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ je konvexní v bodě x ,
- (b) $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ je konkávní v bodě x ,
- (c) $f''(x) = 0 \Rightarrow f$ má v bodě x inflexní bod.

Pokud má funkce f asymptotu $y = kx + q$ když jde to $\pm\infty$, pak

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - kx$$

jsou vlastní limity.