Cvičení 8: Derivace

1 Snadné derivace

Spočtěte následující derivace

(a) $\frac{\mathrm{d}\tan(x)}{\mathrm{d}x}$,

(b) $\frac{\mathrm{d}\sin(x^2)}{\mathrm{d}x}$,

(c) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$,

(d) $\frac{\mathrm{d}\log_x(2)}{\mathrm{d}x}$,

(e) $\frac{\mathrm{d}|x|}{\mathrm{d}x}$.

2 Obtížnější derivace

Spočtěte následující derivace

(a) $\frac{\mathrm{d}5^x}{\mathrm{d}x}$,

(b) $\frac{\mathrm{d}\ \mathrm{sgn}(x)}{\mathrm{d}x}$,

(c) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{(\ln(x))^x}{x^{\ln(x)}}$,

(d) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\sqrt[5]{5x^5+5+5^x}}{5!(5^5+x^5)^5}$,

(e) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{5^{x^5}}$.

3 l'Hospitalovo pravidlo

3.1 Základní limity

Nejprve zkuste odvodit nám již známé limity, které jsme zatím ne všechny uměli dobře zdůvodnit

(a) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x}$,

(b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$,

(c) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$,

(d) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}$,

(e) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$,

(f) $\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan(x)}{x}$.

3.2 Vhodné na l'Hospitala

Spočtěte následující limity pro $\alpha > 0$

(a) $\lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$,

(b) $\lim_{x\to 0}\frac{(\alpha+x)^x-\alpha^x}{x^2}$,

(c) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$,

(d) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)-x}{x-\sin(x)}$,

(e) $\lim_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$,

(f) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x^2)}{x^2\sin(x^2)}$,

(g) $\lim_{x\to 0^+} x^x$,

(h) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan(x))^{\tan(2x)}$,

(i) $\lim_{x\to 0}(2e^x-1)^{\frac{x^2+1}{x}}$.

3.3 Nevhodné na l'Hospitala

Konečně se podívejme na limity, kde nám l'Hospital nepomůže. Zkuste si bezhlavě aplikovat l'Hospitala a pak říct, proč to nefunguje

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^2}}{\sin(x)+\cos(x)}$,

(b) $\lim_{x\to 5} \frac{5x+5}{5x+5!}$,

(c) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+3}}{x+3}$,

(d) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

4 Užitečné vztahy

Derivaci definujeme pomocí

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f = f'(= f_{,x}) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Derivace vyššího řádu (tady k) značíme

$$\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k} = f^{(k)}(= f_{,x\ldots x}) = \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cdots\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}_{k-\text{krát}} f.$$

Na cvičení 7 jsme spočítali základní limity

(a) $\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}x} = \alpha x^{\alpha-1}$,

(b) $\frac{\mathrm{d}\sin(x)}{\mathrm{d}x} = \cos(x)$,

(c) $\frac{\mathrm{d}\cos(x)}{\mathrm{d}x} = -\sin(x)$,

(d) $\frac{\mathrm{d}e^x}{\mathrm{d}x} = e^x$,

(e) $\frac{\mathrm{d}\ln(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$,

(f) $\frac{\mathrm{d}\arctan(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+x^2}$.

Dále na přednášce se dokázalo (pro $f(x), g(x)$ fce a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

(a) $\frac{\mathrm{d}f\cdot g}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\cdot g + f\cdot\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$,

(b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\alpha f + \beta g) = \alpha\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + \beta\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$,

(c) $\frac{\mathrm{d}f(g(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f(g(x))}{\mathrm{d}g(x)}\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f(y)}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}$,

(d) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Pro výpočet limity ve které se vyskytuje neurčitý výraz typu $\frac{\infty}{\infty}$, nebo $\frac{0}{0}$ lze použít l'Hospitalovo pravidlo

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$