Cvičení 7: Limity funkcí

1 Limity funkcí (snadné)

Spočtěte následující limity funkcí pro $m, n \in \mathbb{N}$

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)+1}{\cos(x)-1}$,

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$,

(c) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$,

(d) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$,

(e) $\lim_{x\to 1} \lfloor x \rfloor - x$,

(f) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$,

(g) $\lim_{x\to 0} e^{\frac{\sqrt[3]{1-x^2}-1}{5x^2}}$.

2 Limity funkcí (obtížnější)

Spočtěte následující limity funkcí pro $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$ a $m, n \in \mathbb{N}$

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$,

(b) $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$,

(c) $\lim_{x\to a} \frac{\tan(x)-\tan(a)}{x-a}$,

(d) $\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}}$,

(e) $\lim_{x\to \pi} \frac{\sin(mx)}{\sin(nx)}$,

(f) $\lim_{x\to 1} (1-x)\log_x(2)$,

(g) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$,

(h) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(a+x)+2\ln(a-x)-2\ln(a)}{x^2}$, $\quad a > 0$,

(i) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$,

(j) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\tan(\frac{\pi}{4}+ax))}{\sin(bx)}$,

(k) $\lim_{x\to 0^+} (\cos(\sqrt{x}))^{\frac{1}{x}}$,

(l) $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x^a)}{\pi x^b}$.

3 Derivace

Spočtěte

$$\mathcal{F}[f(x)] = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

pro

(a) $f(x) = x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$,

(b) $f(x) = \sin(x)$,

(c) $f(x) = \cos(x)$,

(d) $f(x) = e^x$,

(e) $f(x) = \ln(x)$,

(f) $f(x) = \arctan(x)$.

4 Užitečné vztahy

Známé limity jsou

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

Platnost ukážeme později.

Symboly o a O:
Nechť $a\in\mathbb{R}^*, \delta>0$ a f,g jsou definované na prstencovém okolí $P(a,\delta)$, přičemž g je zde kladná. Pokud

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0,$$

potom píšeme $f=o(g)$ pro $x\to a$.
Pokud existuje $c>0$ tak, že

$$\forall x\in P(a,\delta):|f(x)|<cg(x),$$

pak píšeme, že $f=O(g)$ pro $x\to a$.

Heineho věta:
Nechť $a\in\mathbb{R}^*, M\subset\mathbb{R}, P(a,\delta)\cap M\neq\emptyset$ pro každé $\delta>0, f:M\to\mathbb{R}$ a $A\in\mathbb{R}^*$. Pak jsou ekvivalentní následující tvrzení

- $\lim_{x\to a}f(x)=A$,
- $\forall x_n\subset M: x_n\neq a\ \forall n\in\mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty}x_n=a$ platí, že $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

Limita složené fce: Nechť $c,A,B\in\mathbb{R}^*$, $f(x)$ je definovaná na nějakém prstencovám okolí A, fce $g(x)$ je definovaná na nějakém prstencovém okolí c,

$$\lim_{x\to A}f(x)=B, \lim_{x\to c}g(x)=A,$$

a platí alespoň jedna z podmínek

- $f(x)$ je spojitá v bodě A,
- Na nějakém prstencovém okolí $P(c,\delta)$ fce $g(x)$ nenabývá hodnoty A.

Potom

$$\lim_{x\to c}f(g(x))=B.$$

Sčítací vzorec pro tangenc je

$$\tan(a\pm b)=\frac{\tan(a)\pm\tan(b)}{1\mp\tan(a)\tan(b)}.$$