

Řešení cvičení 5: Posloupnosti II

1 Typické příklady na triky

Následující příklady Vás mají naučit “trikům” pro počítání některých limit. Každý příklad se vztahuje k nějakému a nejsou nutně řazeny podle obtížnosti

- (a) Stačí použít odhad $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n!)}{n} \leq \frac{1}{n}$ a Větu o dvou policajtech (Určité vztahy bod 5). Dostáváme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n!)}{n} = 0$.
- (b) Protože $\sin(x) \in [-1, 1]$, bude výsledek oscilovat a narůstat. Neboli $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sin(n^n)}$ neexistuje.
- (c) Jak jsme zjistili minule, exponenciála roste rychleji než polynom a tak stačí vhodně rozšířit výraz a dostaneme výraz typu $\frac{0}{1}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 2^n + n^8}{5^n + 10n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{n^8}{5^n}}{1^n + \frac{10n^2}{5^n}} = \frac{5 \cdot 0 + 0}{1 + 0} = 0.$$

- (d) Jak je není výraz dobře definován. Musíme tedy udělat úpravu ve tvaru vhodného rozšíření, abychom odstranili problematické odečítání.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{1 + \frac{1}{n} - 1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = 1.$$

- (e) Použijeme vybranou podposloupnost $n = 2^k$. Zjevně $n \rightarrow \infty \Leftrightarrow k \rightarrow \infty$. Odtud

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2(n)}{n} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log_2(2^k)}{2^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{2^k} = 0.$$

Všimneme si, že tohle tvrzení platí stejně pro jmenovatel typu n^m , $m \in \mathbb{N}$. Plyne z toho, že logaritmus roste pomaleji než polynom.

- (f) Tahle limita je typu “ 1^∞ ”, na což používáme exponencializaci. Tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \ln(n)} = e^0 = 1.$$

Což jsme dostali z minulého příkladu.

2 Zahřívací příklady

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \frac{2n}{2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$.
- (b) Protože máme odhad $n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$ a i ten diverguje, bude divergovat i faktoriál.
- (c) Přímou

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\underbrace{\pi n}_{\rightarrow \infty} + \underbrace{10^{10} \sin(n!)}_{< 10^{10}} \right) = \infty.$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + (-2)^n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1^n} = 0.$$

$$(e) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln(n!)}{n}} = \infty.$$

$$(f) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^4 + 3n^2 + 24}{10n^3 + n^2 - 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n + \frac{3}{n} + \frac{24}{n^3}}{10 + \frac{1}{n} - \frac{4}{n^3}} = \infty.$$

(g) Použijeme odhad $-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n^2} \leq \frac{1}{n}$, tedy pomocí Věty o dvou policajtech

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0.$$

$$(h) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{\sqrt{2n^4 + 4n^2 + 2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{\sqrt{2 + \frac{4}{n^2} + \frac{2}{n^4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(i) Pro lichá čísla dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{2^n} = 0,$$

zatímco pro sudá

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 3^n}{2^n} = \infty.$$

Limita tedy neexistuje.

3 Složitější příklady

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln(n)}{n}} \stackrel{\text{dříve}}{=} 1.$$

(b) Pomocí součtu řady viz cvičení 2 máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1) - 2 \sum_{i=1}^n i}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1) - 2 \frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = 0.$$

(c) Fce $\arctan(x)$ je omezená a tedy triviálně $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan(\pi n)}{n^3} = 0$.

(d) Pro $|q| < 1$ máme podíl typu " $\frac{0}{\infty} = 0$ ". Jinak lze použít dříve dokázaný odhad $n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$ a fakt, že tento podíl je nezáporný

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n!} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2q^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{n}{2} \ln\left(\frac{2q^2}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\underbrace{\frac{2}{n} \ln(2q^2)}_{>0} \underbrace{n \ln(n)}_{\rightarrow \infty}} = 0.$$

(e) Vhodně rozšíříme jmenovatele

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{16 - \frac{1}{n}} - 2}{\sqrt{16 - \frac{1}{n}} - 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{16 - \frac{1}{n}} - 2}{\left(\sqrt[4]{16 - \frac{1}{n}} - 2\right) \left(\sqrt[4]{16 - \frac{1}{n}} + 2\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\sqrt[4]{16 - \frac{1}{n}} + 2\right)} = \frac{1}{4}.$$

$$(f) \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2}{n} + \frac{5}{\ln(n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\left(\frac{2}{n} + \frac{5}{\ln(n)}\right) \ln(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{2 \ln(n)}{n} + 5 \frac{\ln(n)}{\ln(n)}} = e^5.$$

(g) Onačme $\sqrt[k]{1 + \frac{\delta}{n}} \sqrt[l]{1 + \frac{\beta}{n}} =: a(k, l)$. Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(a(k, l) - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{a^{kl}(k, l) - 1}{a^{kl-1}(k, l) + a^{kl-2}(k, l) + \dots + a(k, l)},$$

kde $a^{kl}(k, l) - 1 = \left(1 + \frac{\delta}{n}\right)^l \left(1 + \frac{\beta}{n}\right)^k - 1 = \frac{\delta + \beta}{n} + \dots$, kde členy ... obsahují ve jmenovateli n^2 a víc, které se v limitě neprojeví. Dále je vidět, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a(k, l) = 1$ a ve jmenovateli je takových členů právě $kl - 1$, tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[k]{1 + \frac{\delta}{n}} \sqrt[l]{1 + \frac{\beta}{n}} - 1 \right) = \frac{\delta + \beta}{kl - 1}.$$

(h) Už víme, že faktoriál roste rychleji než polynom libovolného řádu i libovolná exponenciála. Proto stačí odhadnout $\frac{3^n + n^5}{n^5 + n!} \geq \frac{3^n + n^5}{n!}$. Odtud $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n^5}{n^5 + n!} = 0$.

(i)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{\sqrt{n + \sqrt{n}} - 1}{n+1}} = 1.$$

(j)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt[3]{n^3 + 1}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{(n^2 + 2)^3 - (n^3 + 1)^2}{\sum_{i=1}^5 (n^2 + 2)^{\frac{i}{2}} (n^3 + 1)^{\frac{5-i}{3}}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{n^6 + 6n^4 + 12n + 8 - n^6 - 2n^3 - 1}{\sum_{i=0}^5 (n^2 + 2)^{\frac{i}{2}} (n^3 + 1)^{\frac{5-i}{3}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{6n^4 - 2n^3 + 12n + 7}{n^5 \sum_{i=0}^5 \left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^{\frac{i}{2}} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{\frac{5-i}{3}}} = 1. \end{aligned}$$

(k)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + 2 + \dots + n}{n + 2} - \frac{n}{2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n(n+1)}{2n+4} - \frac{n}{2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n(n+1) - n(n+2)}{2n+4} \right) = -\frac{1}{2}.$$

(l) Čítec diverguje, ale jmenovatel je vlastně $(-1)^n$, takže limita neexistuje.

(m)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(\delta + \frac{\beta}{n} \right) + \left(\delta + \frac{2\beta}{n} \right) + \dots + \left(\delta + \frac{(n-1)\beta}{n} \right) \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(n\delta + \frac{\beta}{n} (1 + 2 + \dots + (n-1)) \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(n\delta + \frac{\beta n(n-1)}{2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\delta + \beta \frac{(n-1)}{2n} \right) = \delta + \frac{\beta}{2}. \end{aligned}$$

4 Rekurentní posloupnosti

Klíčové v tomto oddílu je si uvědomit, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}$. Pokud tedy existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, pak

(a) Pokud limita existuje, musí pro ni platit $a = \frac{1}{2} \left(a + \frac{2}{a} \right) \Leftrightarrow a^2 = 2 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{2}$. Protože členy posloupnosti jsou kladné, je přípustné pouze kladné řešení. Nyní musíme ukázat konvergenci, k čemuž postačí monotonie a omezenost ze “správné strany”. Omezenost plyne z AG nerovnosti¹

$$\frac{1}{2} \left(a + \frac{2}{a} \right) \geq \sqrt{a \frac{2}{a}} = \sqrt{2}.$$

Navíc je posloupnost rostoucí, protože

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right) - a_n = \frac{1}{2} \left(\frac{2 - a_n^2}{a_n} \right) \leq 0,$$

takže je konvergentní.

¹

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

- (b) Tato posloupnost zjevně diverguje. Je to vidět i z limitního přechodu $a = a + 1$, což nejde v \mathbb{R} splnit.
- (c) Posloupnost je zjevně rostoucí protože²

$$a_n = \underbrace{\sqrt{c + \sqrt{c + \cdots + \sqrt{c}}}}_{n\text{-krát}}$$

Dále je ale i omezená, protože

$$\begin{aligned} a_n \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2} &\Leftrightarrow \sqrt{c + \sqrt{c + \cdots + \sqrt{c}}} \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2} \\ \Leftrightarrow c + \sqrt{c + \cdots + \sqrt{c}} &\leq \frac{1 + 2\sqrt{1 + 4c} + 1 + 4c}{4} \Leftrightarrow \sqrt{c + \sqrt{c + \cdots + \sqrt{c}}} \leq \frac{1 + 2\sqrt{1 + 4c} + 1 + 4c - 4c}{4} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{c + \sqrt{c + \cdots + \sqrt{c}}} \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \sqrt{c} \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}, \end{aligned}$$

což zjevně platí. Faktor, kterým je posloupnost omezená jsme získali tak, že jsme chtěli v dalším kroku stejnou pravou stranu nerovnice. Horní odhad $\delta(c)$ tedy musí splňovat $\delta(c) = \delta^2(c) - c \Leftrightarrow \delta(c) = \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}$.

Nyní už je triviální limitu spočítat pomocí $a = \sqrt{a + c} \Rightarrow a = \delta(c) = \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}$, protože nás zajímají pouze kladná řešení (členy posloupnosti jsou kladné).

²Můžete si zkusit porovnat sousední členy a umocnit n -krát.