Cvičení 5: Posloupnosti II

1 Typické příklady na triky

Následující příklady Vás mají naučit “trikům” pro počítání některých limit. Každý příklad se vztahuje k nějakému a nejsou nutně řazeny podle obtížnosti

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n!)}{n}$,

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sin(n^n)}$,

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{5\cdot 2^n+n^8}{5^n+10n^2}$,

(d) $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)$,

(e) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2(n)}{n}$,

(f) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

2 Zahřívací příklady

Spočtěte následující limity

(a) $\lim_{n\to\infty}(n-\frac{2n}{2})$,

(b) $\lim_{n\to\infty} n!$,

(c) $\lim_{n\to\infty}(\pi n+10^{10}\sin(n!))$,

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+(-2)^n}{3^n}$,

(e) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$,

(f) $\lim_{n\to\infty} \frac{6n^4+3n^2+24}{10n^3+n^2-4}$,

(g) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$,

(h) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{\sqrt{2n^4+4n^2+2}}$,

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n+(-3)^n}{2^n}$.

3 Složitější příklady

Spočtěte následující limity pro $k,l\in\mathbb{N}$ a $\delta,\beta\in\mathbb{R}$

(a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$,

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)-2\sum_{i=1}^{n} i}{n^2}$,

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{\arctan(\pi n)}{n^3}$,

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!}$, $\quad q\in\mathbb{R}$,

(e) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{16-\frac{1}{n}}-2}{\sqrt{16-\frac{1}{n}}-4}$,

(f) $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{2}{n}+\frac{5}{\ln(n)}}$,

(g) $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[k]{1+\frac{\delta}{n}}\sqrt[l]{1+\frac{\beta}{n}}-1\right)$,

(h) $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n+n^5}{n^5+n!}$,

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}{\sqrt{n+1}}$,

(j) $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+2}-\sqrt[3]{n^3+1})$,

(k) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)$,

(l) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3}{\cos(\pi n)}$,

(m) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\left(\delta+\frac{\beta}{n}\right)+\left(\delta+\frac{2\beta}{n}\right)+\cdots+\left(\delta+\frac{(n-1)\beta}{n}\right)\right]$,

4 Rekurentní posloupnosti

Najděte limity posloupností zadaných jako $a_{n+1} = f(a_n)$

(a) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right),$

(b) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 1,$

(c) $a_1 = \sqrt{c},\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + c} \quad c > 0.$

5 Užitečné vztahy

Pro $a \in \mathbb{R}$ jsou definované výrazy $a \pm \infty$, $\pm(\infty + \infty)$, $a \cdot (\pm\infty)$, $\frac{a}{\pm\infty}$ a pro $a \neq 0$ i $\frac{\pm\infty}{a}$. Jiné výrazy s nekonečny nejsou dobře definované.

Nechť a_n, b_n a c_n jsou posloupnosti a $a \in \mathbb{R}$. Potom

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.
2. Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ a b_n je podposloupnost a_n. Potom $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.
3. Nechť $k \in \mathbb{N}$ je nezávislé na n, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Potom $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$.
4. Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a b_n je omezená. Potom $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.
5. Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$ a nechť $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : a_n \leq c_n \leq b_n$. Potom $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.
6. Nechť $a_n \geq 0\ \forall n > n_0 \in \mathbb{N}$. Potom $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to\infty} e^{b_n \ln(a_n)}$.

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{N}$. Pak

$$a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \cdots + ab^{k-2} + b^{k-1}).$$