Řešení cvičení 4: Posloupnosti

1 Monotonie

(a) První člen je striktně rostoucí, druhý osciluje mezi ± 1. Jako součet by tak mohli oscilovat, nicméně druhý člen je omezený jedničkou. Stačí se tak soustředit na ty n, pro která by rozdíl 1 mohl způsobit narušení monotonie. Když si vypíšeme první tři členy dostáváme $a_1 = 0,\ a_2 = 5,\ a_3 = 8$. Je vidět, že dál nemůže druhý člen narušit monotonii prvního a posloupnost je tedy monotónní.

(b) Odečtením dvou po sobě následujících členů dostáváme

$$\frac{1}{1+n} - \frac{1}{2+n} = \frac{-1}{n^2+3n+2} < 0,$$

tedy jde o klesající posloupnost.

(c) Opět by šlo odčítat, nicméně elegantnější způsob je upravit

$$a_n = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}.$$

Jak jsme určili býše je druhý člen klesající a tedy i celá posloupnost je klesající.

(d) Upravme

$$a_n = \frac{n+1}{\sqrt{n^2+2n-2}} = \sqrt{\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n-2}} = \sqrt{1 + \frac{3}{n^2+2n-2}}.$$

Výraz pod odmocninou je tedy klesající (dalo by se ukázat obdobně jako výše) a protože $\sqrt{\cdot}$ je monotónní, je i zkoumaná posloupnost klesající.

(e) Tato posloupnost není monotónní, jelikož je to jen diskrétní verze $\sin(x)$.

2 Výpočet z definice

(a) Limita je zjevně 1, protože pro libovolné a_n máme $a - a_n = 0 < \epsilon$ pro všechna $\epsilon > 0$. Pro libovolné zadané ϵ nám tedy stačí zvolit $\tilde{n} = 1$, nebo libovolné jiné přirozené číslo.

(b) Je vidět, že $\forall a_n : a_n > 0$ a posloupnost je klesající. Limita ale nemůže být větší než 0, protože pro $a > 0$ bychom mohli najít $a_n < a$. Zkusme tedy $a = 0$. Potom pro zadané $\epsilon > 0$ chceme najít $\tilde{n}$ tak, aby $a_{\tilde{n}} = \frac{1}{\tilde{n}} < \epsilon$. To jistě jde udělat volbou $\tilde{n} = \left\lceil \frac{1}{\epsilon+1} \right\rceil$. Protože je poslounost klesající, bude nerovnost platit $\forall n : n > \tilde{n}$.

(c) Spojitá logaritmus není shora omezen a tak se dá čekat, že jeho diskrétní podoba bude mít nevlastní limitu $+\infty$. Pro zadané $K \in \mathbb{R}$ chceme tedy najít $\tilde{n}$ tak, že $a_{\tilde{n}} = \ln(\tilde{n}) > K$. Odtud tedy dostáváme, že stačí $\tilde{n} = \lceil e^{K+1} \rceil$. Z monotonie ln opět plyne zbytek.

(d) Stačí použít triviální odhad $n! > n$ a je vidět, že posloupnost bude mít nevlastní limitu $+\infty$. Pro zadané K lze volit $\tilde{n} = K$.

Za povšimnutí stojí, že v tomhle případě se s opravdu špatným odhadem pracuje dobře. Nejde nám o to odhadnout funkci přesně, když si můžeme pomoct, jde s odhadem "plýtvat". Jak špatný odhad $n! > n$ je jsme viděli už ve cvičení 2, kdy se nám podařilo odhadnout $n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$, neboli faktoriál roste rychleji než libovolný polynom (a ukáže se, že i než libovolná exponenciála).

(e) Po přeznačení $n \leftarrow n+1$ dostáváme přesně příklad (b) až na první člen posloupnosti. Ten jde ale bez problémů odebrat, protože limita posloupnosti nezáleží na konečném počtu jejích členů. Jde tedy příslušně posunout vztah pro $\tilde{n}$ určený výš.

(f) Použijeme Větu o dvou policajtech s pomocnými posloupnostmi $\{0\}_{n=1}^{\infty}$ a $\left\{\frac{1}{1+n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Pro všechna n platí $0 \leq \frac{1}{1+n^2} \leq \frac{1}{1+n}$ a tedy jsou splněny předpoklady věty a i tato posloupnost jde k 0. K určení $\tilde{n}$ použijeme stejný postup jako výše, tedy

$$\left|\frac{1}{1+n^2} - 0\right| = \frac{1}{1+n^2} < \epsilon \Rightarrow n > \sqrt{\frac{1}{\epsilon} - 1} \Rightarrow \tilde{n} = \lceil \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \rceil + 1.$$

3 Výpočet

(a) Stačí výraz rozšířit vhodným doplněním podle $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, neboli

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Čitatel je konstanta a jmenovat je neomezený a kladný, takže máme výraz typu "$+\frac{1}{\infty}$", takže poslounost jde do 0.

(b) Limita této posloupnosti neexistuje. To je jasné z toho, že po sobě následující členy jsou vzdáleny 2. Tedy nepůjde najíc člen posloupnosti, od kterého jsou členy vzdáleny od nějakého čísla méně jak např. $\epsilon = 0.5$.

(c) Oproti předchozímu příkladu se situace mění, protože pro $n > 1$ je $n!$ sudé číslo. Proto $(-1)^{n!} = 1$ pro $n > 1$ a tedy až na první člen, který o limitním chování nerozhoduje dostáváme příklad $2(a)$ a limita zkoumané posloupnosti je 1.

(d) Pokud si vzpomeneme na již zmiňovaný výsledek z cvičení 2, příklad 3.2 (c) $n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$, tak jde udělat odhad

$$\frac{n!}{n^k} \geq \frac{1}{n^k}\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} > n^{\frac{n}{2k}},$$

což diverguje a tedy diverguje i zkoumaná posloupnost. Poučení tedy zní "faktoriál roste rychleji než polynom libovolného řádu".

(e) Sinus je funkce omezená a tedy jde členy posloupnosti odhadnout $|\frac{\sin(n)}{n}| < \frac{1}{n}$. S výhodou pak jde použít Větu o dvou policajtech na posloupnosti $\{\pm\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$, které jsou obě k nule viz výše. Limita zkoumané posloupnosti je tak taky 0.

(f) Po úpravě dostáváme

$$\frac{2^n + 10^n}{10^{n+1}} = \frac{1}{10}\frac{\left(\frac{2}{10}\right)^n + 1^n}{1^n} \stackrel{n\to\infty}{\to} \frac{1}{10}.$$

(g) Limita opět neexistuje, což jde ukázat podobně jako v (b), protože pro sudá n dostáváme právě (b) (až na znaménko, což je jen posunutí).

(h) Prostým zkoumáním limit samotných výrazů dostáváme

$$\underbrace{n}_{\to\infty}\underbrace{\left(\sqrt{\frac{1}{\underbrace{n}_{\to 0}}+1} - 1\right)}_{\to 0}.$$

Máme tedy neurčitý výraz typu "$\infty \cdot 0$". Řešení spočívá v úpravě, kterou jsme použili už v (a)

$$n\left(\sqrt{\frac{1}{n}+1}-1\right) = n\frac{\frac{1}{n}+1-1}{\sqrt{\frac{1}{n}+1}+1} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}+1}+1} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{2}.$$

(i) Řadu v čítateli jde sečíst pomocí výsledků z minulých cvičení $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. Odtud dostáváme

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{2}.$$

(j) Protože konečný počet prvků nerozhoduje o limitním chování, můžeme prvních 1000 členů zahodit. Pro zbytek použijeme odhat

$$0 \overset{n\to\infty}{\leftarrow} 0 < \frac{n^5}{n^6+n!} < \frac{n^5}{n!} \overset{n\to\infty}{\to} 0,$$

jak jsme již ukázali v (d).