Cvičení 4: Posloupnosti

1 Monotonie

Rozhodněte o monotonii následujících posloupností

(a) $\left\{n^2 + (-1)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$,

(b) $\left\{\frac{1}{1+n}\right\}_{n=1}^{\infty}$,

(c) $\left\{\frac{n+2}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$,

(d) $\left\{\frac{n+1}{\sqrt{n^2+2n-2}}\right\}_{n=1}^{\infty}$,

(e) $\{\sin(n)\}_{n=1}^{\infty}$.

2 Výpočet z definice

Přímo pomocí definice spočtěte následující limity[1], nebo dokažte, že neexistují

(a) $\{1\}_{n=1}^{\infty}$,

(b) $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$,

(c) $\{\ln(n)\}_{n=1}^{\infty}$,

(d) $\{n!\}_{n=1}^{\infty}$,

(e) $\left\{\frac{1}{1+n}\right\}_{n=1}^{\infty}$,

(f) $\left\{\frac{1}{1+n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

3 Výpočet

Spočtěte limity následujících posloupností, nebo ukažte, že neexistují

(a) $\left\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$,

(b) $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$,

(c) $\left\{(-1)^{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$,

(d) $\left\{\frac{n!}{n^k}\right\}_{n=1}^{\infty}, \quad k \in \mathbb{N}$,

(e) $\left\{\frac{\sin(n)}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$,

(f) $\left\{\frac{2^n+10^n}{10^{n+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$,

(g) $\left\{\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$,

(h) $\left\{n\left(\sqrt{\frac{1}{n}+1} - 1\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$,

(i) $\left\{\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$,

(j) $a_n = \begin{cases} 2^{10\pi n}, & n < 1000 \\ \frac{n^5}{n^6+n!}, & \text{jinak} \end{cases}$.

[1]Napište pravidla jak volit $\tilde{n}$ pro libovolná zadaná ϵ, nebo K.

4 Užitečné vztahy

Posloupnost je fce $a : \mathbb{N} \to M$, kde jednotlivé členy posloupnosti značíme $a(n) = a_n$. Celou posloupnost pak značíme $(a_n) = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$. Posloupnost nazveme

(a) rostoucí (resp. klesající), pokud $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} > a_n$ (resp.$a_{n+1} < a_n$),

(b) nerostoucí (resp. neklesající), pokud $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \leq a_n$ (resp.$a_{n+1} \geq a_n$).

Mějme nyní reálnou posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{R}$. Číslo a nazveme (vlastní) limitou posloupnosti (a_n), pokud

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \tilde{n} \ \forall n > \tilde{n} : |a - a_n| < \epsilon.$$

Řekneme, že posloupnost má nevlastní limitu $\pm\infty$, pokud

$$\forall K \in \mathbb{R} \ \exists \tilde{n} \ \forall n > \tilde{n} : \pm a_n > K.$$

K označení používáme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim a_n = a.$$