Řešení cvičení 3: Funkce

1 Vlastnosti složných fcí

(a) Přímo z definice dostáváme

$$\forall x, y \in A : x = y \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow g(f(x)) = g(f(y)).$$

Takže složením dvou prostých fcí dostaneme opět prostou fci.

(b) Protože g je na, je i h na, protože $(\forall y \in C\ \exists x \in B : g(x) = y) \Rightarrow (\forall y \in C\ \exists x \in A : h(x) = g(f(x)) = y)$.

(c) Protože platí (a) i (b), platí i (c).

2 Skládání fcí

(a)

$$\begin{aligned} f \circ f &= 2(2x+1)+1 = 4x+3, \\ f \circ f \circ f &= 4(2x+1)+3 = 8x+7, \\ f \circ f \circ f \circ f &= 16x+15, \end{aligned}$$

neboli obecné složení dá

$$\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f \circ f}_{i-\text{krát}} = 2^i x + \sum_{k=0}^{i-1} 2^i.$$

(b)

$$\begin{aligned} f \circ f &= \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x}, \\ f \circ f \circ f &= \frac{\frac{1}{1-x}-1}{\frac{1}{1-x}} = x, \\ f \circ f \circ f \circ f &= \frac{1}{1-x}. \end{aligned}$$

Takže je vidět, že po složení 4 f dostaneme opět f. Skládání je tedy 4-periodické.

3 Vlastnosti obrazu

(a) Tuto vlastnost mají pouze prosté fce. Uvažujme např. $f(x) = x^2$ pro $A = [-1, 0], B = [0, 1] \Rightarrow A \cap B = \{0\}$ a $f(0) = 0$. Nicméně $f(A) = f(B) = [0, 1]$.

(b) Na levé straně máme

$$\{y \in B : (\exists x \in X)(f(x) = y) \vee (\exists x \in Y)(f(x) = y)\},$$

zatímco na pravé

$$\{y \in B : (\exists x \in X \vee \exists x \in Y)(f(x) = y)\}.$$

Předpokládejme, že tyto množiny nejsou stejné. Pak by muselo existovat $x \in X \cup Y$ takové, že jeho obraz nenajdeme v obrazech X ani Y. To je ale spor, protože pak nemůže x být z $X \cup Y$.

(c) Opět postupujme sporem a předpokládejme, že $\exists y \in f(X) \setminus f(Y)$ takové, že $y \notin f(X \setminus Y)$. Musí tedy existovat vzor $x \in X$ tak, že $y = f(x)$, který ale není v obrazu $X \setminus Y$ a tedy musí být z $X \cap Y$. To je ale spor, protože to nemůže platit, že $y \in f(X) \setminus f(Y)$.

(d) Toto tvrzení je opakem předchozího a tedy platit nemůže. Uvažujme např. opět $f(x) = x^2$ pro $X = [-1, 0],\ Y = [0, 1]$. Potom $f(X \setminus Y) = (0, 1]$ a $f(X) \setminus f(Y) = \emptyset$.

4 Vlastnosti zobrazení

(a) Tato funkce je prostá, protože vždy existuje možnost najít inverzi pro libovolnou podmnožinu definičního oboru.

(b) Tato funkce je surjektivní (na), protože pro libovolnou množinu v prostoru, kam je zobrazení f definováno, jde tuto množinu získat jako obraz něčeho v A.

5 Konstrukce funkce

(a) Uvažujme např. $f(n) = 2n$. Ta je prostá, protože pro žádnou různou dvojici přirozených čísel nedostaneme stejný obraz. Nicméně není na, protože např. 3 není obraz žádného přirozeného čísla.

(b) Např. $f(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ má tyto vlastnosti[1], protože např. pro 2 a 3 dostaneme $f(2) = f(3) = 1$, ale je na, protože libovolné $m \in \mathbb{N}$ dostaneme jako obraz $n = 2m$.

(c) Tady si člověk asi může nejvíc vyhrát, ale jedna možnost je uvažovat “nekonečně se zvětšující zuby” (viz Obrázek 1)

$$f(n) = 1 + n - 2^{\lfloor \log_2(n) \rfloor},$$

které zařídí, že pro každou mocninu 2 dostaneme $f(n) = 1$. Je vidět, že je funkce na a každý obraz má nekonečně mnoho vzorů.

6 Min/Max/Sup/Inf fcí

(a) Pro $f(x) = 1$ je jasné, že $\min(f(x)) = \max(f(x)) = 1$. Protože tyto existují, jsou rovny supremu/infimu.

(b) Fce $f(x) = \frac{x}{1+x}$ je na $\mathbb{R}_0^+$ rostoucí, což je vidět z $f(x) = 1 - \frac{1}{1+x}$. Odtud tedy plyne, že extrémy budou na okrajích intervalu. Pro minimum máme $f(0) = 0$ a protože se nabývá, je to i infimum. S maximem je situace složitější. Z druhého zápisu je vidět, že $f(x) < 1,\ \forall x \in \mathbb{R}_0^+$. Čísla v intervalu $[1, \infty)$ tak jsou horní závory. Nejmenší z nich je $\sup(f(x)) = 1$. Maximum tato funkce nemá. Ukážeme to tak, že budeme předpokládat, že existuje maximum $M \leq \sup(f(x)) = 1$. Je jasné, že $M \neq 1$, protože f nenabývá hodnoty 1 pro žádné x. Máme tedy $M < 1$, což nastane pro

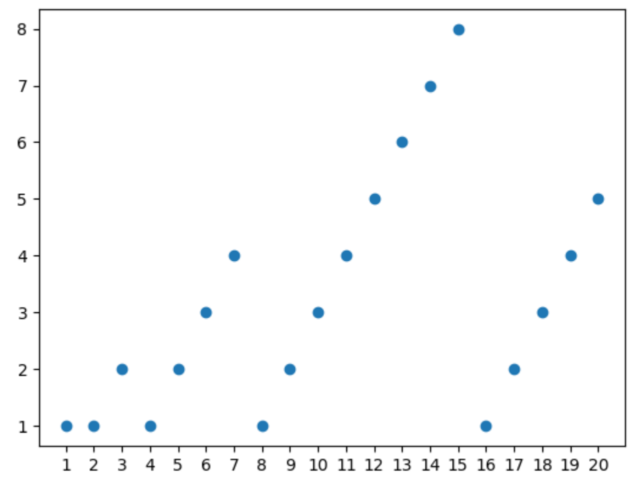
$$M = \frac{x_M}{x_M + 1} \Leftrightarrow x_M = -1 + \frac{1}{1 - M}.$$

Nicméně pro $x_M + 1$ dostáváme

$$f(x_M + 1) = \frac{x_M + 1}{x_M + 2} = \frac{\frac{1}{1-M}}{\frac{1}{1-M} + 1} = \frac{1}{2 - M} > M,$$

protože poslední nerovnost říká (pro $M \lesssim 1$ kde nás to zajímá) $M^2 - 2M + 1 = (M - 1)^2 > 0$, což je pravda. To je ale spor s tím, že M je maximum. Maximum tedy neexistuje.

[1] $\lfloor \cdot \rfloor$ značí spodní celou část.



Obrázek 1: Fce řešící úlohu 5 c).

(c) Tato funkce je hyperbola posunutá do $x = 1$, která diverguje. Nemá tak ani maximum, ani minimum (důkaz by probíhal podobně jako v (b)). Nemá ani supremum/infimum, protože v $\mathbb{R}$ nemáme číslo, které by bylo větší než všechna ostatní čísla. Skutečně, pokud by M mělo být takové číslo, tak okamžitě dostaneme spor, protože $2M > M$ (podobně infimum). Proto se zavádí tkz. rozšířená reálná čísla $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, ve kterých už jde supremum a infimum najít.