Cvičení 3: Funkce

1 Vlastnosti složných fcí

Pro fce $f : A \to B$, $g : B \to C$ a $h = g \circ f$ rozhodněte zda platí

(a) f, g jsou prosté $\Rightarrow h$ je prostá,

(b) f, g jsou na $\Rightarrow h$ je na,

(c) f, g jsou bijekce $\Rightarrow h$ je bijekce,

Pokud tvrzení neplatí, najděte protipříklad.

2 Skládání fcí

Určete $f \circ f \circ f \circ f$ pro

(a) $f(x) = 2x + 1$,

(b) $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Pokuste se napsat vzorec pro $i \in \mathbb{N}$ složených fcí f.

3 Vlastnosti obrazu

Rozhodněte, zda pro $f : A \to B$, $X, Y \subseteq A$ platí

(a) $f(X) \cap f(Y) = f(X \cap Y)$,

(b) $f(X) \cup f(Y) = f(X \cup Y)$,

(c) $f(X) \setminus f(Y) \subseteq f(X \setminus Y)$,

(d) $f(X \setminus Y) \subseteq f(X) \setminus f(Y)$.

Pokud ano, dokažte tvrzení. Pokud ne, najděte protipříklad.

4 Vlastnosti zobrazení

Co můžete říct o zobrazeních $f : A \to B$, pro která platí

(a) $\forall M \subseteq A : f^{-1}(f(M)) = M$,

(b) $\forall N \subseteq B : f(f^{-1}(N)) = N$.

5 Konstrukce funkce

Zkonstruujte funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ s následujícími vlastnostmi

(a) f je prostá, ale není na,

(b) f je na, ale není prostá,

(c) f je na a každý prvek v obrazu má nekonečně mnoho vzorů.

6 Min/Max/Sup/Inf fcí

Pro následující funkce najděte jejich minima, maxima, suprema a infima pro $x \in \mathbb{R}_0^+ = [0, \infty)$ pokud existují

(a) $f(x) = 1$,

(b) $f(x) = \frac{x}{1+x}$,

(c) $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

7 Užitečné poznámky

Mějme množiny A, B, C. Potom

- fce $f : A \to B$ je zobrazení (předpis), který každému $x \in A$ přiřazuje nějaké $f(x) \in B$. Obraz množiny A je množina
$$f(A) = \{y \in B : \exists x \in A : f(x) = y\},$$
- inverzní fce k f je $f^{-1} : B \to A$, která pro libovolnou dvojici $x \in A$ a $y \in B$ splňuje
$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y),$$
- složení dvou zobrazení $f : A \to B$ a $g : B \to C$ je fce $h : A \to C$ splňující $h(x) = g(f(x))\ \forall x \in A$. Používá se značení $h = g \circ f$.

Fce $f : A \to B$ je

- prostá, pokud $\forall x, y \in A : f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$,
- na (neboli surjektivní), pokud $\forall y \in B\ \exists x \in A : f(x) = y$,
- bijekce, pokud je f prostá a na.

Pro $M \subseteq \mathbb{R}$ a $x \in M$ platí, že

- x je maximum $M \Leftrightarrow\ \forall a \in M : a \leq x$.
- x je minimum $M \Leftrightarrow\ \forall a \in M : a \geq x$.
- x je supremum $M \Leftrightarrow\ (\forall a \in M : a \leq x) \wedge (\forall \epsilon > 0\ \exists b \in M : x - \epsilon \leq b)$.
- x je infimum $M \Leftrightarrow\ (\forall a \in M : a \geq x) \wedge (\forall \epsilon > 0\ \exists b \in M : x + \epsilon \geq b)$.