Řešení cvičení 2: Logika

1 Kvantifikátorový zápis

Původní výroky

(a) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} : x = \frac{y}{2}$.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}\ \epsilon > 0\ \exists y \in \mathbb{Q} : |x - y| \leq \epsilon$.

(c) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{Z} : n = 2k$.

(d) $\forall n \in \mathbb{N} : (n = 2k,\ k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow n > 0$.

Negace

(a) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} : x \neq \frac{y}{2}$.

(b) $\exists x \in \mathbb{R}\ \epsilon \leq 0\ \forall y \in \mathbb{Q} : |x - y| > \epsilon$.

(c) $\exists n \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{Z} : n \neq 2k$.

(d) $\exists n \in \mathbb{N} : (n = 2k,\ k \in \mathbb{Z}) \wedge n \leq 0$.

Pravdivosti

(a) Zjevně platí původní výrok.

(b) Původní tvrzení říká, že racionální čísla jsou tkz. hustá v reálných. To je pravda, ale ukázat to zatím neumíme.

(c) Zjevně $n = 5 \in \mathbb{N}$, ale není sudé.

(d) Jelikož platí závěr původního tvrzení, tak platí celé původní tvrzení (viz užitečné vztahy).

2 Výroková logika

Elegantní způsob řešení nabízí tabulka pokrývající všechny možnosti. Výrok pak jde rozdělit na podvýroky a pravdivost každého podvýroku řešit zvlášť. Uvažujme první příklad $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow A)$, pro který máme tabulku

	A	B	$A \Leftrightarrow B$	$B \Leftrightarrow A$	$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow A)$
	1	1	1	1	1
(a)	1	0	0	0	1
	0	1	0	0	1
	0	0	1	1	1

Tvrzení je tedy pravdivé pro všechna A a B.

V dalších příkladech postupujeme obdobně. Uveďme jen výsledné tabulky (vynecháme poslední sloupec se samými 1)

Za povšimnutí stojí, že (d) je přímo zápis důzaru nepřímého.

(b)

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow C$	$(A \Rightarrow C)$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1

(c)

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

(d)

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1

(e)

A	B	$B \wedge \neg B$	$A \vee \neg A$
1	1	0	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

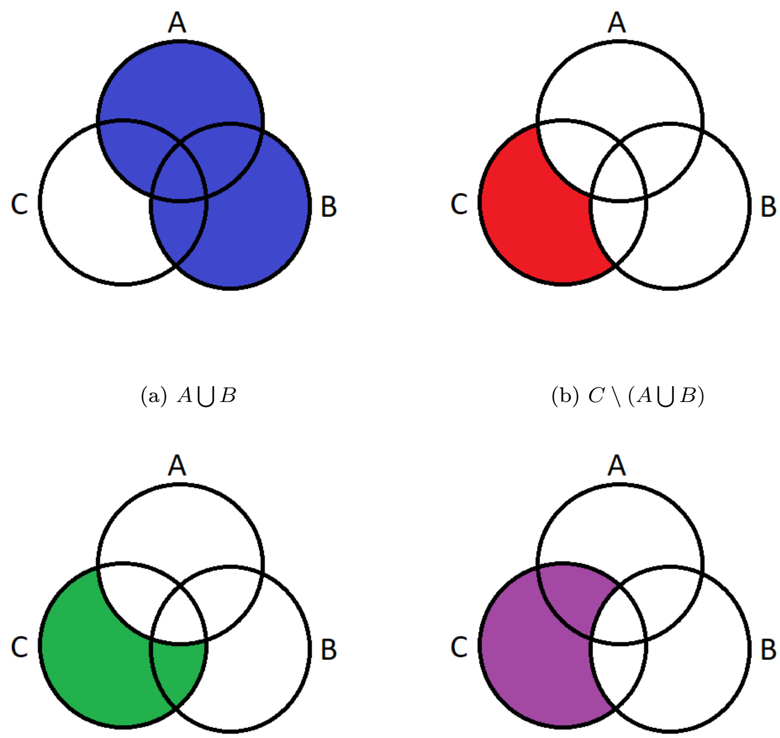
(f)

A	B	$\neg(A \vee B)$	$\neg B \wedge \neg A$
1	1	0	0
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	1

3 Důkazy

3.1 Množiny

Množinové důkazy je výhodné znázornit graficky, jak je ukázáno na Obrázku 1 pro příklad (a). Množiny znázorníme kruhy, přičemž oblast mimo kruh představuje prvky mimo danou množinu. Z obrázku je jasné, že rovnost platí. V příkladu (b) postupujeme analogicky.



(a) $A \bigcup B$ (b) $C \setminus (A \bigcup B)$

(c) $C \setminus A$ (d) $C \setminus B$

Obrázek 1: Vizualizace množinové rovnosti.

3.2 Odhady

(a) Použijeme klasický důkaz indukcí. Pro $n = 2$ dostáváme $2 < 9/4$, tedy je nerovnost splněna. Přistoupíme k indukčnímu kroku (více o něm v oddílu 3.3)

$$(n+1)! = (n+1)\left(\frac{n+1}{2}\right)^n < \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1},$$

neboli

$$1 < \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Pravá strana pro $n = 2$ dává $\approx 1.19 > 1$ a tedy je nerovnost splněna. Navíc je pravá strana rostoucí funkcí n a tedy bude nerovnost splněna $\forall n \in \mathbb{N}$. Výraz na pravé straně je opravdu zajímavý a setkáme se s ním i později, protože představuje definici Eulerova čísla

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \stackrel{n\to\infty}{\to} e \approx 2.72,$$

což je jedna z fundamentálních konstant přírody.

(b) Budeme postupovat tak, že rozdělíme n na sudá a lichá a dokážeme nerovnost zvlášť pro obě možnosti. Pro $n = 1$ je nerovnost splněna triviálně. Pro $n = 2$ dostáváme $(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 \geq 1 + 2x$, což je opět pravda. Přistupme k indukčnímu kroku, který zní

$$(1 + x)^{n+2} \geq 1 + (n + 2)x.$$

S využitím indukčního předpokladu

$$(1 + x)^{n+2} = (1 + x)^n(1 + x)^2 \geq (1 + nx)(1 + 2x + x^2) = 1 + 2x + x^2 + nx + 2nx^2 + nx^3 = 1 + (n + 2)x + nx^2(x + 2) + x^2.$$

Protože $x^2 \geq 0 \wedge x + 2 \geq 0$ dostáváme $(1 + x)^{n+2} \geq 1 + (n + 2)x$, což je přesně co jsme chtěli ukázat.

(c) Pro $n = 1, 2$ nerovnost platí. Pro sudá $n = 2m$ dostáváme

$$n! = (2m)(2m - 1)\dots(m + 1)m! > (2m)\dots(m + 1) > m^m = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}},$$

zatímco pro lichá $n = 2m + 1$

$$n! = (2m + 1)(2m)\dots(m + 1)m! > (2m + 1)\dots(m + 1) > (m + 1)^{m+1} > (m + \frac{1}{2})^{m+\frac{1}{2}} = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

3.3 Tvrzení

Nalezení "správného" typu důkazu není vždy snadné. Dělíme je na víc typů podle "přístupu" k problému. Přímý důkaz ukáže přímo, že $A \Rightarrow B$. Důkaz nepřímý se snaží o to samé, ale není to na první pohled jasné, protože ukazuje $\neg B \Rightarrow \neg A$. Jak jsme ale ukázali dříve, $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$. Pokud děláme důkaz sporem, tak se snažíme ukázat, že pokud dokazované tvrzení neplatí, plyne z toho neplatnost jiného tvrzení, o kterém víme, že platné je. Konečně v důkazu indukcí ukážeme, že daná rovnost závslá na parametru n platí pro nějakou hodnotu (většinou $n = 1$) a že z platnosti pro libovolou hodnotu n dostaneme platnost pro hodnotu $n + 1$. Tvrzení pak platí pro libovolné $n \in \mathbb{N}$.

Projděme nyní tvrzení ze zadání.

(a) *přímo*: Uvažujme následující nerovnost

$$(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 \geq 0.$$

Ta je jistě platná $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$. Po roznásobení dostaneme

$$a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bc + c^2 \geq 0.$$

Po přeuspořádání dostaneme přímo dokazovaný vztah.

(b) *sporem*: Pokud neplatí $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, pak

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} < 2 \quad / \cdot ab,$$

$$a^2 + b^2 < 2ab \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 = (a + b)^2 < 0.$$

To je spor, protože druhá mocnina reálného čísla je nezáporná. Všimněme si, že jsme potřebovali fakt, že a, b jsou kladná při úpravách.

(c) *indukcí*: Pro $n = 1$ je rovnost zjevně splněná. Přejděme proto hned k druhému kroku, neboli k záměne $n \to n+1$.

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

$$\sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Nyní využijeme indukčního předpokladu $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \Leftrightarrow \frac{n^2+n+2n+2}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}$$

a tím je důkaz dokončen.

K tomuto vztahu se váže historka - na základní škole byla prý jednou paní učitelka matematiky z mladého Carla Gausse unavená a tak mu dala za úkol sečíst čísla od 1 do 100. Nicméně se ho tím nezbavila na dlouho. Gaussův přístup k výpočtu byl trochu jiný než jsme naznačili zde - všiml si, že první a poslední člen sumy dávají stejný součet jako druhý a předposlední atd. To vlastně představuje přímý důkaz tvrzení výše.

(d) *přímo*: Tvrzení jde slovy formulovat taky jako “číslo $n^2 - n$ je sudé”. To lze snadno nahlédnout po úpravě

$$n^2 - n = n(n-1).$$

(e) *indukcí*: Pro $n = 1$ rovnost zjevně platí, přejděme tak rovnou k indukčnímu kroku

$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = (n+1)^2,$$

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) + (2n+1) = (n+1)^2.$$

Opět použijeme indukční předpoklad $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$

$$n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$$

a dostali jsme rovnost.

(f) *nepřímo*: Budeme se snažit dokázat tvrzení nepřímo, tedy budeme dokazovat “Pokud n není dělitelné třemi, pak ani n^2 není dělitelné třemi”. Tedy jestliže n není dělitelní třemi, pak jde napsat

$$n = 3k+1 \ \vee n = 3k+2, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Potom ovšem

$$n^2 = (3k+1)^2 = 3\underbrace{(3k^2+2k)}_{\in\mathbb{Z}}+1$$

a tedy ani n^2 není dělitelné třemi. Podobně v druhém případě

$$n^2 = (3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3\underbrace{(3k^2+4k+1)}_{\in\mathbb{Z}}+1.$$

4 Bonus

Mudrců se nejde zeptat na otázku type “Je můj kabát černý?”, protože nic nevnímají. Proto je třeba použít logiku. Při pohledu do tabulky logických spojek je jasné, že otázky typu “Lžeš ty, nebo ten druhý?” nás nikam neposunou, protože oba odpoví stejně. Potřebujeme něco, co není symetrické při záměně A a B, tedy implikaci. Řešením je otázka typu “Pokud ty lže, lže i ten druhý?”. Pokud se zeptáme lháře, dostaneme výrok typu “$1 \Rightarrow 0$”, na což on odpoví ne. Pokud se ale zeptáme pravdomluvného dostaneme “$0 \Rightarrow 1$”, tedy odpoví ano.