

Cvičení 2: Logika

1 Kvantifikátorový zápis

Zapište následující tvrzení pomocí kvantifikátorů

- (a) Ke každému reálnému číslu existuje číslo dvakrát větší.
- (b) Pro všechna reálná x a reálná kladná ϵ existuje racionální y tak, že vzdálenost x a y je nanejvýš ϵ .
- (c) Všechna přirozená čísla jsou sudá.
- (d) Pokud je přirozené číslo sudé, pak je kladné.

Výroky následně znegujte a pokuste se rozhodnout o jejich pravdivosti.

2 Výroková logika

Dokažte následující tvrzení

- (a) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow A)$,
- (b) $(A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$,
- (c) $A \vee \neg(A \wedge B)$,
- (d) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$,
- (e) $(B \wedge \neg B) \Rightarrow \neg(A \vee \neg A)$,
- (f) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg B \wedge \neg A)$.

3 Důkazy

3.1 Množiny

Dokažte pro množiny A, B, C

- (a) $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$
- (b) $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$

3.2 Odhady

Dokažte následující odhady pro $x \geq -2$ a $n \in \mathbb{N}$

- (a) $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$, $n > 1$,
- (b) $(1+x)^n \geq 1+nx$,
- (c) $n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$.

Hint: v (b) a (c) ukažte platnost pro $n = 1, 2$ a indukční krok dělejte zvlášť pro sudá a líná n .

3.3 Tvrzení

Dokažte následující vztahy přímo, nepřímo, sporem, nebo indukcí

$$(a) \forall a, b, c \in \mathbb{R} : a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc,$$

$$(b) \forall a, b \in \mathbb{R}^+ : \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2,$$

$$(c) \forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$(d) \forall n \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N}_0 : n^2 - n = 2k,$$

$$(e) \forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2,$$

$$(f) \forall n \in \mathbb{N} : n^2 \text{ je dělitelné } 3 \Rightarrow n \text{ je dělitelné } 3.$$

Hint: přímo: (a), (d), nepřímo: (f), sporem: (b), indukcí: (c), (e)

4 Bonus na zamyšlení

Přijďte za dvěma mudrci, kteří nevnímají ze světa nic kromě Vašeho hlasu a ztratili všechnu paměť. Víte, že jeden vždy lže a druhý vždy mluví pravdu. Jak zjistíte, který je který?

5 Užitečné vztahy

Výroky s kvantifikátory negujeme pomocí

$$\neg(\forall x \in X : V) = \exists x \in X : \neg V,$$

$$\neg(\exists x \in X : V) = \forall x \in X : \neg V.$$

Logické spojky se chovají podle

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1