

Cvičení 14: Aplikace integrálů

1 Délka křivky

Spočtete délky následujících křivek mezi a a b

(a) $f(x) = x^2$, $a = -1$, $b = 1$,

(c) $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln(x)}{2}$, $a = 1$, $b = e$,

(b) $f(x) = e^x$, $a = 0$, $b = 5$,

(d) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $a = -1$, $b = 1$.

2 Objem tělesa

Spočtete objem těles vzniklých rotací následujících křivek od a do b

(a) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $a = -1$, $b = 1$,

(c) $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 0$, $b = \infty$,

(b) $f(x) = \frac{r}{h}x$, $a = 0$, $b = h$,

(d) $f(x) = r$, $a = 0$, $b = h$.

3 Povrch tělesa

Spočtete povrch těles vzniklých rotací následujících křivek od a do b

(a) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $a = -1$, $b = 1$,

(c) $f(x) = r$, $a = 0$, $b = h$.

(b) $f(x) = \frac{r}{h}x$, $a = 0$, $b = h$,

(d) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 0$, $b = 5$.

4 Užitečné vztahy

Délka křivky

Nechť $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ má na $[a, b]$ spojitou první derivaci. Pak délka křivky l grafu mezi a a b je

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2} dx.$$

Rotační těleso

Nechť $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$. Pak objem tělesa vzniklého rotací grafu f v \mathbb{R}^3 je

$$V = \int_a^b \pi f^2(x) dx$$

a jeho povrch je

$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2} dx.$$