

# Cvičení 12: Určité integrály

## 1 Snadné integrály

Spočtete následující integrály

(a)  $\int_0^5 x^3 + 2x^2 + \frac{x}{3} dx$ ,

(b)  $\int_0^2 \frac{x}{(1+2x^2)^2} dx$ ,

(c)  $\int_4^1 \sqrt{x}e^{1-\sqrt{x^3}} dx$ ,

(d)  $\int_0^\infty \frac{3}{5+2x} dx$ .

## 2 Složitější integrály

Spočtete následující integrály

(a)  $\int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x - 1} dx$ ,

(b)  $\int_0^1 x \ln(x) dx$ ,

(c)  $\int_0^\infty e^{-ax} \cos(bx) dx$ ,

(d)  $\int_0^\infty x^3 e^{\frac{x^2}{2}} dx$ .

## 3 Oblasti mezi křivkami

Spočtete obsah plochy ohraničené následujícími křivkami

(a)  $f_1(x) = |x| - 1$ ,  
 $f_2(x) = 1 - x^2$

(b)  $f_1(x) = x + 1$ ,  
 $f_2(x) = -x + 1$ ,  
 $f_3(x) = x - 1$ ,  
 $f_4(x) = -x - 1$ ,

(c)  $f_1(x) = \frac{(x-1)^2}{6} - 1$ ,  
 $f_2(x) = \frac{x^2}{10} + 2$ ,

(d)  $f_1(x) = \sqrt{1-x^2}$ ,  
 $f_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$

## 4 Užitečné vztahy

*Fundamental theorem of calculus:*

Nechť  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá na  $[a, b]$  a nechť  $F$  je primitivní funkce k  $f$ . Pak

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a).$$

*Věta o substituci*

Nechť  $\phi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  a  $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $\phi$  má vlastní první derivaci všude na  $(a, b)$ . Označme

$$J := \phi((a, b)) = \{\phi(t), t \in (a, b)\}.$$

Nechť  $f$  je spojitá na  $J$  a integrovatelná na vnitřku  $J$ . Pak

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x) \, dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) \, dx.$$

*Integrace per partes*

Nechť  $f, g : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  jsou spojité na  $(\alpha, \beta)$  a  $F, G : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  jsou k nim primitivní funkce. Pak

$$\int_a^b f(x)G(x) \, dx = [FG]_a^b - \int_a^b F(x)g(x) \, dx,$$

kde

$$[FG]_a^b = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$