

# Cvičení 10: Taylorův rozvoj

## 1 Přímé rozvoje

Postupujeme prostě tak, že funkci neustále derivujeme a vyhodnocujeme tuto derivaci v příslušném bodě.

(a)

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{x^2} & f(x_0) &= 1, \\ f'(x) &= 2xe^{x^2} & f'(x_0) &= 0, \\ f''(x) &= 2e^{x^2} & f''(x_0) &= 2, \end{aligned}$$

Tedy

$$T_2 = 1 + x^2 + o(x^2).$$

Všimněme si, že protože je funkce sudá, musí všechny liché členy rozvoje být nulové a to nám i vyšlo. Tento rozvoj je tedy platný i do 3tího řádu. Dále si jde všimnout, že jsme dostali prostě rozvoj  $e^y$  pro  $y = x^2$ .

(b)

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1 + x^2) & f(x_0) &= 0, \\ f'(x) &= \frac{2x}{1 + x^2} & f'(x_0) &= 0, \\ f''(x) &= \frac{2(1 + x^2) - 4x^2}{(1 + x^2)^2} & f''(x_0) &= 2, \end{aligned}$$

Tedy

$$T_2 = x^2 + o(x^2).$$

(c)

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \sin(x) & f(x_0) &= 0, \\ f'(x) &= e^x \sin(x) + e^x \cos(x) & f'(x_0) &= 1, \\ f''(x) &= 2e^x \cos(x) & f''(x_0) &= 2, \end{aligned}$$

Tedy

$$T_2 = x + x^2 + o(x^2).$$

(d)

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{ax} & f(x_0) &= 1, \\ f'(x) &= ae^{ax} & f'(x_0) &= a, \\ f''(x) &= a^2 e^{ax} & f''(x_0) &= a^2, \end{aligned}$$

Tedy

$$T_2 = 1 + ax + \frac{a^2 x^2}{2!} + o(x^2).$$

Opět nám vyšel vlastně rozvoj  $e^x$ , do kterého jsme akorát “dosadili”  $ax$ .

(e)

$$\begin{aligned}f(x) &= \sqrt{1+ax} & f(x_0) &= 1, \\f'(x) &= \frac{a}{2\sqrt{1+ax}} & f'(x_0) &= \frac{a}{2}, \\f''(x) &= -\frac{a^2}{3!}(1+ax)^{-\frac{3}{2}} & f''(x_0) &= -\frac{a^2}{3!},\end{aligned}$$

Tedy

$$T_2 = 1 + \frac{ax}{2} - \frac{a^2x^2}{2 \cdot 3!} + o(x^2).$$

$$\sqrt{1+ax}, \quad x_0 = 0,$$

(f)

$$\begin{aligned}f(x) &= \sqrt{x} & f(x_0) &= 1, \\f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} & f'(x_0) &= \frac{1}{2}, \\f''(x) &= -\frac{1}{3!}x^{-\frac{3}{2}} & f''(x_0) &= -\frac{1}{3!},\end{aligned}$$

Tedy

$$T_2 = 1 + \frac{(x-1)}{2} - \frac{(x-1)^2}{2 \cdot 3!} + o(x^2).$$

## 2 Přibližná hodnota

- (a) Na začátku výpočtu si situaci zlehčíme tak, že vytkneme největší číslo typu  $a^5$  menší než 250. To dává  $3^5 = 243$ , tedy  $\sqrt[5]{250} = \sqrt[5]{243+7} = \sqrt[5]{243} \sqrt[5]{1 + \frac{7}{243}} = 3 \sqrt[5]{1 + \frac{7}{243}}$ . Nyní můžeme použít Taylorův rozvoj pro  $(1+x)^{\frac{1}{5}}$  kolem  $x=0$ , protože  $\frac{7}{243} \ll 1$ . Tento rozvoj je (buď spočteme rukou, nebo použijeme wolfram)

$$(1+x)^{\frac{1}{5}} = 1 + \frac{x}{5} - \frac{2x^2}{25} + o(x^2).$$

Pokud použijeme jen první řád, dostáváme hodnotu  $\sqrt[5]{1 + \frac{7}{243}} \approx 1 + \frac{7}{1215} \approx 1.00576$ . Chybu určíme pomocí následujícího řádu. My ale neznáme hodnotu  $c$  a proto chybu odhadneme a zvolíme  $c$  tak, aby byla co největší. Druhá derivace naší funkce je

$$\left((1+x)^{\frac{1}{5}}\right)'' = -\frac{4}{25(1+x)^{\frac{9}{5}}},$$

což je v abso­lutní hodnotě<sup>1</sup> největší pro  $x=0$ , tedy volíme i  $c=0$ . Tam je chyba

$$R_2 = \frac{4}{25} \frac{1}{2!} \left(0 - \frac{7}{243}\right)^2 \approx 0.00007.$$

Dostáváme tedy  $\sqrt[5]{250} = 3(1.00576 \pm 0.00007) = 3.0173 \pm 0.0002$ . Správná hodnota<sup>2</sup> je  $\approx 3.01709$ , tedy v rámci chyby.

- (b) Známe rozvoj exponenciály a tedy přímočaře do prvního řádu dostáváme

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2),$$

<sup>1</sup>Zbytek jsme definovali jako  $R_n = f - T_n$ . Znaménko nám tedy říká, jestli je odhad větší či menší, ale zde nás zajímá jeho velikost.

<sup>2</sup>Neboli to, co spočítal počítač obdobným postupem, ale do vyššího řádu.

což pro  $x = 2$  dává do prvního řádu  $e^2 = 3$ . Chyba takového odhadu je ale závislá na  $e^x$ , protože exponenciála je sama svojí derivací. Jak je vidět, je třeba chybu odhadnout jinak a to pomocí součtu zbytku řady jako to bylo v prvním bonusovém DÚ. Poznamenejme ale, že  $e^2 \approx 7.389$ , tedy chyba našeho odhadu je dost velká. Členy řady totiž pro  $x = 2$  klesají poměrně pomalu.

- (c) Použijeme řadu  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ . Do prvního řádu opět máme  $\ln(1.2) = 0.2$ . Chybu určíme z následujícího řádu, kde víme

$$(\ln(1+x))'' = -\frac{1}{(1+x)^2},$$

tedy největší příspěvek dostaneme pro  $c = 0$ , což dává chybu

$$R_2 = \frac{1}{2!} (0.2)^2 \approx 0.02.$$

Přesná hodnota je  $\ln(1.2) \approx 0.182$ , tedy v rámci chyby máme výsledek dobře.

- (d) Zde lze s výhodou využít buď sčítací vzorec, nebo přímo geometrickou intuici, která říká  $\sin(\pi - 0.2) = \sin(0.2)$ . Nyní použijeme Taylora pro sinus kolem nuly a do první řádu máme  $\sin(0.2) = 0.2$ . Chybu určíme pomocí

$$(\sin(x))'' = -\sin(x),$$

což maximalizuje na  $[0, 0.2]$  právě  $c = 0.2$

$$R_2 = \sin(0.2) \frac{1}{2!} (0.2)^2 \approx 0.004.$$

Tady jsem podváděl, protože opět nám zbytek závisí na samotném  $\sin(x)$ , který se snažíme určit. Je ale vidět, že  $R_2 < \sin(0.2)$  a tedy 0.2 se zdá jako rozumný odhad, protože chyba jde odhadnout ze samotného odhadu  $\sin(0.2)$ . Skutečná hodnota je  $\sin(0.2) \approx 0.1987$ .

### 3 Vnoření řad

Známe rozvoje příslušných funkcí a chceme celkový rozvoj. Řady do sebe tedy “dosadíme” a snažíme se postupně najít všechny členy řádu  $x^n$  a postupovat do kýženého  $n$ . Zde chceme  $n = 3$  a tedy rovnou budeme vše vyššího řádu strkat do  $o(x^3)$

(a)

$$e^x \sin(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right) = x + x^2 + x^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3!}\right) + o(x^3).$$

(b)

$$\sin(\sin(x)) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) - \underbrace{\frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)^3}{3!}}_{-\frac{x^3}{3!} + o(x^4)} + \underbrace{\frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)^5}{5!}}_{o(x^4)} = x + x^3 \left(-\frac{1}{3!} - \frac{1}{3!}\right) + o(x^4).$$

## 4 Limity

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right) - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{4!} + o(x^5)}{x^4} = \underbrace{\frac{1}{4!} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^5)}{x^4}}_{\text{Tohle se většinou vynechává.}} = \frac{1}{4!}.$$

(b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\ln(a)x} + e^{-\ln(a)x} - 2}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \ln(a)x + \frac{(\ln(a)x)^2}{2!} + o(x^2)\right) + \left(1 - \ln(a)x + \frac{(\ln(a)x)^2}{2!} + o(x^2)\right) - 2}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(a)x)^2 + o(x^2)}{x^2} = (\ln(a))^2. \end{aligned}$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin(x) - x(x+1)}{x^3} \stackrel{3(a)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 + x^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3!}\right) + o(x^3) - x(x+1)}{x^3} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3!}\right) = \frac{1}{3}.$$

(d) Taylora v nekonečnu dělat neumíme, ale stejně nám může pomoci trik - uděláme substituci  $x = \frac{1}{y}$  a použijeme známé rozvoje

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 \left( \cos\left(\frac{1}{x}\right) - e^{-\frac{1}{2x^2}} \right) &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\cos(y) - e^{-\frac{y^2}{2}}}{y^4} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \left(1 - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2!} \left(-\frac{y^2}{2}\right)^2\right) + o(y^4)}{y^4} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\frac{y^4}{4!} - \frac{y^4}{8} + o(y^4)}{y^4} = \frac{1}{4!} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

(e)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2e^x - e^{2x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) - \left(1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!}\right) - 1 + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 - \frac{(2x)^2}{2!} + o(x^2)} = -1.$$

## 5 Motivace z fyziky

Nejprve musíme vzorec upravit, protože rozvoj děláme v malém ale bezrozměrném parametru  $\frac{v}{c} \ll 1$ , který označíme  $x$ . Proto

$$K = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2,$$

Pokud se zbavíme otravných konstant a soustředíme se jen na důležitou část, pak rozvíjíme

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^5).$$

To zpětně dosadíme do vzorce pro kinetickou energii

$$K = m_0 c^2 \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{v}{c} \right)^2 + \frac{3}{8} \left( \frac{v}{c} \right)^4 + o \left( \left( \frac{v}{c} \right)^5 \right) \right] - m_0 c^2 =$$
$$\underbrace{\frac{1}{2} m_0 v^2}_{\text{Klasická kinetická energie}} + \underbrace{\frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2}}_{\text{První relativistická oprava}} + o \left( \left( \frac{v}{c} \right)^5 \right).$$

Je tedy vidět, že pro pomalu letící částice bude hlavním příspěvkem část, kterou pozorovali lidé už předtím. To samozřejmě dává dobrý smysl, protože pokud má teorie nějakou část poznání rozšiřovat, musí v limitách kdy dobře fungovala předchozí teorie přecházet právě na ni.