

## Cvičení 1: Opakování

### Definiční obory

Najděte definiční obory  $D_f \subset \mathbb{R}$  následujících funkcí

$$(a) f : y = \sqrt{x-3},$$

$$(d) f : y = \sin^{-1}(\pi x),$$

$$(b) f : y = \log_2 \left( \frac{x}{x^2-4} \right),$$

$$(c) f : y = \sqrt{\ln(\sqrt{x^2-4x+4}-x)},$$

$$(e) f : y = \left( \sqrt{\left( \sqrt{\left( \sqrt{(\sqrt{x-1})^2 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{4} \right)^2} \dots \right)^2} \right)^2,$$

### Rovnice a nerovnice

Řešte následující (ne)rovnice v  $\mathbb{R}$

$$(a) \frac{x-4}{x+2} < 3,$$

$$(g) \left| \sin \left( \pi x + \frac{\pi}{2} \right) \right| < \frac{1}{2},$$

$$(b) |2x^2 - 2x - 4| < |x^2 + x - 2|,$$

$$(h) 2x^3 - 4x^2 - 38x + 40 = 0,$$

$$(c) \log_2(x-1) = 10,$$

$$(i) \log_2(2x^2 - 4) - \log_2(x) = \log_2(2),$$

$$(d) \log_\pi(x^2 - 3) \geq 0,$$

$$(j) \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 3x - 2) \geq 0,$$

$$(e) \sin(x) = \sin(2x),$$

$$(k) ||x-2| + 1| \leq 5.$$

$$(f) \sin(x) = \sin(3x),$$

### Konstrukce množin

Určete, co jsou následující množiny

$$(a) \{x \in \mathbb{R} : (\exists a \in \mathbb{R})(|1 + x\sqrt{a}| \leq 2ax^2)\},$$

$$(b) \{a \in \mathbb{R} : (\forall x \in \mathbb{R})(|x-2| \leq 1 \Rightarrow x^2 - ax > 5)\}.$$

### Odhady

Dokažte následující odhady pro  $x \geq -2$  a  $n \in \mathbb{N}$

$$(a) n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n, \quad n > 1,$$

$$(b) (1+x)^n \geq 1+nx,$$

$$(c) n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

*Hint: v (b) a (c) ukažte platnost pro  $n = 1, 2$  a indukční krok dělejte zvlášť pro sudá a líná  $n$ .*

### Tvrzení

Dokažte následující vztahy přímo, nepřímo, sporem, nebo indukcí

$$(a) \forall a, b, c \in \mathbb{R} : a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc,$$

$$(d) \forall n \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N}_0 : n^2 - n = 2k,$$

$$(b) \forall a, b \in \mathbb{R}^+ : \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2,$$

$$(e) \forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2,$$

$$(c) \forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$(f) \forall n \in \mathbb{N} : n^2 \text{ je dělitelné } 3 \Rightarrow n \text{ je dělitelné } 3.$$

*Hint: přímo: (a), (d), nepřímo: (f), sporem: (b), indukcí: (c), (e)*

## Užitečné vztahy

Pro goniometrické funkce platí

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y)$$

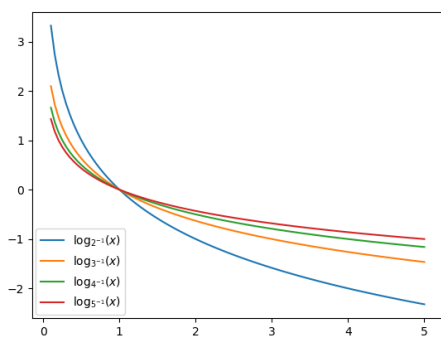
$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y)$$

Pro logaritmus platí

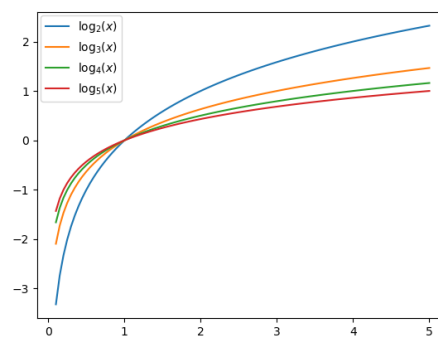
$$\forall a \in (0, \infty) \forall x \in \mathbb{R} : \log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(xy)$$

$$\forall a \in (0, \infty) \forall x, y \in \mathbb{R} : y \log_a(x) = \log_a(x^y)$$

$$\forall a, b \in (0, \infty) \forall x \in \mathbb{R} : \log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$



(a)  $a < 1$



(b)  $a > 1$

Obrázek 1:  $y = \log_a(x)$