

①

1.1

$$a_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow a_1 = 0 \Rightarrow$  jsou lin. nezávislé

1.2

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
 jsou lin. závislé

②

2.1

Podobně jako v 1. Budejme

$$a_1 u + a_2(u+v) + a_3(u+w) = 0$$

$$(a_1 + a_2 + a_3)u + a_2v + a_3w = 0$$

Pro všechny  $u, v, w$  jsou LN musí

$$0 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$0 = a_2$$

$$0 = a_3 \Rightarrow a_i = 0 \Rightarrow \{u, u+v, u+w\} \neq LN$$

2.2

$$a_1(u-v) + a_2(u-w) + a_3(v-w) = 0$$

$$(a_1 + a_2)u + (-a_1 + a_3)v + (-a_2 - a_3)w = 0$$

$$\Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
 nové LN

(3)

3.1 Ne:  $X = \{(1)\}$  a  $Y = \{(1), (0)\}$  jsou obě množiny

3.2 Ne:  $X = \{(1)\}$  je LN, ale  $Y = \{(1), (0)\}$  není množinou

3.3 Ano: Mějme  $X = \{v_1, \dots, v_n\}$  a  $Y = \{v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_m\}$

Prostředí  $X$  je L2 pokud  $\exists d_1, \dots, d_n \in \mathbb{N}$  tak, že

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0 \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$$

Poznámka pro množinu  $Y$  má každou

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i + \sum_{j=1}^m \beta_j u_j = 0$$

Pokud ale množina  $\beta_j = 0$ , pak dostatečné L2 podmínky  
pro  $X$ , která platí  $\Rightarrow$  ex. algoritmus k homologiaci  $\Rightarrow Y$  je L2.

3.4 Ano: analogicky k 3.3

3.5 Ne:  $Y = \{(1), (2)\}$  je L2, ale  $X = \{(1)\}$  je LN.

(4)

4.1 Poholme jeho v 1. dostatečné

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow a_i = 0 \Rightarrow LN$$

4.2

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Prostředí jsme v  $\mathbb{Z}_3$ , tedy

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{mod } \mathbb{Z}_3 \text{ je množina L2.}$$

⑤ " $\Rightarrow$ " sporem: Nejme dve rozdílné množiny

$$U_1 + V_1 = X = U_2 + V_2 \quad v_i \in V, u_i \in U$$

tedy

$$u_1 - u_2 = v_2 - v_1$$

hde levá strana leží ve svém podprostoru.

Pokud tedy  $U \cap V = \{0\}$ , pak

$$u_1 - u_2 = v_2 - v_1 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2 \wedge v_1 = v_2$$

a rozdílní  $x$  je jednoznačný.

" $\Leftarrow$ "

Pokud rozdílní méně jednoznačný, pak

$$u_1 \neq u_2 \wedge v_1 \neq v_2$$

tedy

$$u_1 - u_2 \neq 0$$

a  $u_1 - u_2$  tedy leží jen v  $U$ , takže ve  $V$ . Prvník  
tedy méně je nula.

⑥

6.1

$$a_1(2x-1) + a_2(x-2) + a_3 3x = 0$$

$$(2a_1 + a_2 + 3a_3)x + (-a_1 - 2a_2) = 0$$

$$\Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow LZ$$

6.2

$$a_1(x^2+2x+3) + a_2(x+1) + a_3(x-1) =$$

$$= a_1x^2 + (2a_1 + a_2 + a_3)x + (3a_1 + a_2 - a_3) = 0$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow LN$$

6.3 Cheeme majit  $a_1, a_2$  abh. re

$$a_1 \sin(x) + a_2 \cos(x) = 0$$

pro  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Odhad pro  $x=0 \Rightarrow a_2 = 0$  a pro

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow a_1 = 0 \Rightarrow$  fájou L.N.

6.4 náme  $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

tedy

$$0 = a_1 \sin(x+1) + a_2 \sin(x+2) + a_3 \sin(x+3)$$

$$= (a_1 \cos(1) + a_2 \cos(2) + a_3 \cos(3)) \sin x$$

$$(a_1 \sin(1) + a_2 \sin(2) + a_3 \sin(3)) \cos x$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \cos(1) & \cos(2) & \cos(3) \\ \sin(1) & \sin(2) & \sin(3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

což jsou 2 rovnice pro 3 neznámé  $\Rightarrow$  musí mít nezávislou řešení  $\Rightarrow$  L2.

6.5 náme  $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$  a  $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

tedy

$$a_1 \ln x + a_2 \frac{\ln x + \ln 2}{\ln 10} + a_3 \frac{2 \ln x}{\ln 2} = 0$$

odhad mají:

$$a_1 = \frac{2}{\ln 2} \quad a_2 = 0 \quad a_3 = -1$$

je nezávislou lin. kombinací, která dává 0, tedy  
náročna je L2.

⑦

" $\Rightarrow$ " Polud jen sloupc LZ, tak

$$Ax = 0 \Rightarrow x = 0$$

tedy

$$A^T A x = 0 \Rightarrow x = 0$$

a tedy pro členecovou malici  $A^T A$  mame  
jidne' homogenu' řešení  $\Rightarrow A^T A$  je regulární.

" $\Leftarrow$ "

Polud je  $A^T A$  regulární, tak

$$A^T A x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Polom ale i po přenásobení  $x^T$ .

$$x^T A^T A x = (Ax)^T A x =: y^T y = 0$$

odlud platí  $y = 0 = Ax \Rightarrow$  sloupc  
jen lineárně nezávislý.