

1.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{cykly}} P = (1\ 3\ 5)(2\ 4) \xrightarrow{\text{transpozycja}}$$

$$P = (1, 5)(1, 3)(2, 4)$$

2.1

$$P \circ Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

2.2

$$Q \circ P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \neq P \circ Q$$

2.3

$$P = (1\ 2)(3)(4\ 6\ 5) = (1, 2)(3, 4)(3, 4)(4, 5)(4, 6)$$

$$\Rightarrow \text{sgn}(P) = (-1)^5 = -1$$

2.4

$$P^{-1} = \left( \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} \left( = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \right) \right)$$

2.5

$$P^{-1} = (1\ 2)(3)(4\ 5\ 6) = (1, 2)(3, 1)(3, 1)(4, 6)(4, 5)$$

$$\Rightarrow \text{sgn}(P^{-1}) = (-1)^5 = -1$$

3.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 & 11 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$P^2 = (1\ 4\ 3)(2)(5)(6\ 10\ 8)(11\ 9\ 7)$$

$$P^4 = (1\ 3\ 4)(2)(5)(6\ 8\ 10)(11\ 7\ 9)$$

$$P^8 = (1\ 4\ 3)(2)(5)(6\ 10\ 8)(11\ 9\ 7)$$

$$\Rightarrow P^6 = P^2 \circ P^4 = (1)(3)(4)(2)(5)(6)(8)(10)(11)(9)(7) = \text{id}$$

$$\Rightarrow P'' = P^8 \circ P^2 \circ P = (1\ 4\ 3)(2\ 5)(6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11)$$

$$P^{-''} = (1\ 3\ 4)(2\ 5)(6\ 11\ 10\ 9\ 8\ 7)$$

A  $P^6$  je skutečně nejmenší identita, protože v  $P$  máme cykly délky 3, 2 a 6  $\Rightarrow$  pro  $P^2$  je cyklus 2 identita a tedy hledáme nejmenší spol. násobek 3, 2, 6, což je 6.

4. Pro  $q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}$  dodáváme

$$p \circ q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ p(a) & p(b) & p(c) \end{pmatrix} \quad q \circ P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & a & c \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow p(a) = b \quad p(b) = a \quad p(c) = c$$

$$\Downarrow$$

$$c = 3$$

$$\Rightarrow q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \wedge q = P$$

5. Budeme postupovat postupně. Protože  $p^2$  obsahuje cyklus (13), musíme  $p$  obsahovat

$$(1 a 3 b)$$

Podobně musíme obsahovat

$$(2 c 4 d)$$

Ty se v  $p^2$  roztáhnou na

$$(1 3)(ab) \quad a \quad (2 4)(cd)$$

tedy  $p$  obsahuje (1 2 3 4) nebo (1 4 3 2)

Protože 5 a 6 se roztáhli na sebe, obsahuje  $p$  buď (5)(6), nebo (56).

Podobně pro poslední cyklus máme

$$(7 e 8 f 9 g 10 h)$$

ale už máme nezbytný člen na  $efgh \Rightarrow$  perm. neexistuje.

6. Rozhlád na cykly dána

$$r = \begin{cases} (1 m)(2 m-1) \dots \left(\frac{n}{2} \frac{n+2}{2}\right) & m \text{ sudé} \\ (1 m)(2 m-1) \dots \left(\frac{n-1}{2} \frac{n-3}{2}\right) \left(\frac{n+1}{2}\right) & m \text{ liché} \end{cases}$$

což už jsou rovnou transpozice a tedy

$$\text{Sgn}(r) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \end{cases}$$

7. Vše plyne ze složení dvou permutací, což opět musí být permutace = lichá = prostá a na.

Prosta:  $f$  je prostá  $\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

U nás tedy

$$(p \circ q)(x) = p(q(x)) = p(q(y)) = (p \circ q)(y)$$

ale protože  $p$  je prostá, tak  $q(x) = q(y)$  a protože  $q$  je také prostá, tak  $x = y$ .

na:  $\forall x \in \{1, \dots, N\} \exists y \in \{1, \dots, N\} : (p \circ q)(y) = x$

My ale víme, že  $p$  je na  $\Rightarrow \exists z \in \{1, \dots, N\} : p(z) = x$

a tudíž pro  $q$  máme  $\exists y \in \{1, \dots, N\} : q(y) = z$ .

□

8. Znaménko  $p$  je součin znamének jednotlivých cyklů. Cyklus délky  $k$  jde rozložit na  $k-1$  transpozic

$$(i_1 \dots i_k) = (i_1, i_2) \dots (i_{k-1}, i_k)$$

a tedy cyklus sude délky dá znaménko  $-1$  a liché  $+1$ .