

1.1 Z definice singulární

1.2 Představte Gaussovu eliminaci. Ta nemění hodnoty matic, ani fakt, že sloupec je prázdný. Pokud nemá prázdný poslední sloupec, pojmenujme proměnné, aby to tak bylo. Nyní je poslední řádek prázdný.

2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -10 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & +\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{array} \right) \Rightarrow \tilde{A}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow A$ je singulární $\Rightarrow \tilde{A}^{-1}$ neexistuje

3. Matice AB je singulární. Proč pro radek

$$I = (AB)^{-1}AB \Rightarrow B^{-1} = (AB)^{-1}A$$

tedy B by musela být singulární.

4. násobení řádku

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & a_1 \\ \hline 0 & \vdots & \vdots \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \frac{1}{a_1} \\ \hline 0 & \vdots & \vdots \end{array} \right) \Rightarrow \text{násobení } \frac{1}{a}$$

Prohlouení řádku

$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & \vdots & \vdots \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & \vdots & \vdots \end{array} \right) \Rightarrow \text{ta samá}$$

Přičlení řádku

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & \vdots & \vdots \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & 1 \\ \hline 0 & \vdots & \vdots \end{array} \right) \Rightarrow \text{odčlenění}$$

5.1

$$(ABC)^{-1} = (BC)^{-1}A^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

$$\text{Zk: } (ABC)^{-1}ABC = C^{-1}B^{-1}A^{-1}ABC = C^{-1}B^{-1}BC = \dots = I$$

5.2

$$A(B^T C)^{-1}(AB)^T = A C^{-1} (B^T)^{-1} B^T A^T = A C^{-1} A^T$$

5.3

$$(I - B^T A^{-1})A + (A^T B)^T A^{-1} = A - B^T A^{-1}A + B^T A A^{-1} = A - B^T + B^T = A$$

6. Nejdnu uherine pro nejake k $\in \mathbb{N}$

$$(ADA^{-1})^k = \underbrace{(ADA^{-1}) \dots (ADA^{-1})}_{k\text{-krát}} = ADA^{-1}A \dots DA^{-1} = \\ = \underbrace{ADD \dots DA^{-1}}_{k\text{-krát}} = AD^k A^{-1}$$

Pro $\left(\frac{1}{i}\right)^k$, pokud násobujeme k a i > 1, tehle cely násobek
je menší a menší. Proto

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{i}\right)^k = 0$$

Více viz Matematická analyza 1.

Proto

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (ADA^{-1})^k = \lim_{k \rightarrow \infty} AD^k A^{-1} = A \left(\lim_{k \rightarrow \infty} D^k \right) A^{-1}$$

ale

$$\lim_{k \rightarrow \infty} D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. 2 definice $\text{trace}(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii}$. Pro matici

$$\text{trace} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

8. 2 definice

$$\text{trace}(BAB^{-1}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n B_{ij} A_{jk} B_{ki}^{-1} = \sum_{ij,k} B_{ki}^{-1} B_{ij} A_{jk} = \\ = \text{trace}(B^{-1}BA) = \text{trace}(A)$$

9.

$$AB + A^{-1}B = 0 \quad / \cdot A^{-1}$$

$$B + I + A^{-1}B = 0 \quad / \cdot B^{-1}$$

$$I + B^{-1} + A^{-1} = 0 \quad / \cdot B \quad \Rightarrow$$

$$B + I + BA^{-1} = 0 \quad / \cdot A$$

$$BA + A + B = 0$$

$$\begin{array}{rcl} AB + A + B = 0 \\ BA + A + B = 0 \end{array} \quad > 0$$

$$AB - BA = 0$$

Uvažujme myslí, že A je singulární \Rightarrow existuje posloupnost řádkových operací, které přivedou poslední řádek A na nulou. Dále platí, že pak bud A má \sim řádky stejných množ. matic již i AB a pravou

$$B = -AB - A$$

platí to i pro B .

Myslí můžeme celou řadu transformací a posloupnost řádků pro B . To dleláme až dleto

$$A = \begin{pmatrix} \bar{A} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

takže \bar{A} je \neq regulární a pravohorní B .

Myslí stáčí tento hmat dosadit do $AB + A + B = 0$ a dostaneme řadu regulární \bar{A}, \bar{B} , pro kterou lze uvažovat plati:

10. Uvažujme BÍNO, ře poslední přední políčko
ji nejnic uprostřed. Pokud má být např. Bob,
čtve vlastně doplnit nějaký parametr, provést
Gaussovu eliminaci a svítit hodnotu parametru
tak, že myšlenkové matice ji singulární. To
jde vidy zřídit.

Podobně bude postupovat Alice, pokud bude ještě
poslední. Zkusí srovnat, zda pro m lidi (tedy
když na konci myšlenky Alice) nemůže Bob udělat ne
součet několika řádků své v příslušné řadě. To ale nemůže:
pokud bude Alice být vidy do stejných řádků
jako Bob. V tom případě bude po lodi Alice vidy
suchý pcož mohou mít políčka v horizontálních řádkech a
Alice bude do horizontálního řádku poslední! Místo
tedy opět dělat Gaussovu eliminaci, aby pro matici
 $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $m < m$, kterou jde vidy doplnit regulérní.