Cvičení 15: Afinní prostory

Afinní prostor je množina

$$L = x + V = \{x + v \mid x \in \mathbb{R}^n, v \in V\} = \left\{\alpha_0 x + \alpha_1(x + b_1) + \cdots + \alpha_m(x + b_m) \mid x \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=0}^{m} \alpha_i = 1\right\},$$

kde V je vektorový prostor nad $\mathbb{R}^n$ s bazí b_i.

Vektory $v_1, \ldots v_n$ jsou afinně nezávislé, pokud

$$\left(\alpha_1 v_1 + \ldots \alpha_n v_n = 0 \wedge \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0\right) \Rightarrow (\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0)\,.$$

1. Ukažte, že množina (řešitelné) soustavy $Ax = b$ je afinní prostor pomocí uzavřenosti na afinní kombinace.

2. Rozhodněte, zda jsou vektory

$$x_0 = (1,2,3)^T, \quad x_1 = (2,3,1)^T, \quad x_2 = (1,3,2)^T, \quad x_3 = (2,1,3)^T.$$

   afinně závislé.

3. Rozhodněte, zda vektory

$$y_0 = (1,0,2)^T, \quad y_1 = (2,2,1)^T, \quad y_2 = (2,1,3)^T, \quad y_3 = (3,3,2)^T.$$

   leží v jedné rovině.

4. Rozhodněte, zda $M = N$ pro

   i

$$M = \operatorname{span}\{(1,2)^T\} + (1,-1)^T,$$
$$N = \operatorname{span}\{(2,4)^T\} + (2,3)^T,$$

   ii

$$M = \operatorname{span}\{(1,2,1)^T, (2,1,0)^T\} + (1,0,0)^T,$$
$$N = \operatorname{span}\{(0,2,3)^T, (3,0,-1)^T\} + (2,-1,-1)^T.$$

5. Uvažujte dvě afinní zobrazení f, g v rovině, přičemž f představuje překlopení podle přímky $p_f : y = 10$ a g představuje překlopení podle přímky $p_g : x = 2$.

   i Najděte maticový předpis zobrazení f.

   ii Najděte maticový předpis zobrazení g.

   iii Odvoďte maticový přepis zobrazení $f \circ g$.

6. Dokažte, že vektory $x_0, x_1, \ldots x_n$ jsou afinně nezávislé právě tehdy, když vektory

$$y_0 = (x_0^T, 1)^T, y_1 = (x_1^T, 1)^T, \ldots y_n = (x_n^T, 1)^T$$

   jsou lineárně nezávislé.