(1)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = (1+3t) \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ vyjádření není jednoznačné!

(2)

2.1 Doplníme bázi jedním z vektorů e_i. Pro zjištění, který z nich je LN řešme

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -6 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$ doplnit lze lib. z e_i

2.2 Postupujeme zcela stejně po přepsání báze do vektorové podoby

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

tedy bázi doplníme buď o $(1,0,0,0)^T$, tedy o 1, nebo o $(0,0,0,1)^T$, tedy o x^3.

(3) Vlastně hledáme taková b_i, aby

$$b_1(v_1+v_4)+b_2(v_2+v_3)+b_3v_4+b_4v_2 =$$
$$= a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3+a_4v_4$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} a_1 &= b_1 \\ a_2 &= b_2+b_4 \\ a_3 &= b_2 \\ a_4 &= b_1+b_3 \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [u]_Y = (a_1, a_3, a_4-a_1; a_2-a_3)^T$$

(4) BONUS: řešení v $\mathbb{R}$

4.1 Chceme vědět, které vektory jsou LZ => řešíme hom soustavu

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & -6 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 7 & 7 & -3 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & -1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -6 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$ LN jsou první 3 vektory a dimenze je 3.

4.2 Řešme přísl. soustavu

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 9 & 3 & 6 & 9 & 7 & 9 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & 5 & 9 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow x = p_1(2,1,0,0,0,0,0)^T + p_2(1,0,2,1,0,0,0)^T + p_3(1,0,1,0,1,0,0)^T + p_4(1,0,4,0,0,3,1)^T$$

tedy dimenze je 4 a báze tvoří např. ↑ vektory

Protože $\dim U < \dim V \Rightarrow$ nemůže platit $V \subseteq U$.
Pokud má platit $U \subseteq V$, pak báze U je závislá na bázi V, tedy řešíme

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 7 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 4 & 4 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -3 & -5 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -15 & -15 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -32 & -29 & +14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ řešení neexistuje a neplatí $U \subseteq V$

④ (Podle zadání)

4.1
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & -6 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 7 & 7 & -3 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

LN jsou první 3 vektory a dimenze je 3.

4.2
$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 9 & 3 & 6 & 9 & 7 & 9 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & 5 & 9 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 4 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 3 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_7 \end{pmatrix} = p_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p_7 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Báze prostoru jsou přísl. vektory a dim. je 4

Určitě nemůže platit $V \subset U$, protože $\dim V = 4$ a $\dim U = 3$. Zkoumejme tedy opačný případ tím, že určíme, zda jsou bázové vektory U v lin. obalu V. Řešíme tedy

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 0&1&1&2&1&1&0\\ 0&0&0&1&2&3&1\\ 4&1&2&0&4&4&4\\ 0&0&1&0&0&2&4\\ 0&1&0&0&3&4&0\\ 3&0&0&0&2&2&2\\ 1&0&0&0&4&4&4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1&0&0&0&4&4&4\\ 0&1&0&0&3&4&0\\ 0&0&1&0&0&2&4\\ 0&0&0&1&2&3&1\\ 0&1&2&0&2&2&2\\ 0&1&1&2&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1&0&0&0&4&4&4\\ 0&1&0&0&3&4&0\\ 0&0&1&0&0&2&4\\ 0&0&0&1&2&3&1\\ 0&0&2&0&4&3&2\\ 0&0&1&2&3&2&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1&0&0&0&4&4&4\\ 0&1&0&0&3&4&0\\ 0&0&1&0&0&2&4\\ 0&0&0&1&2&3&1\\ 0&0&0&0&4&4&0\\ 0&0&0&0&4&4&4\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{array}\right)$$

Z předposledního řádku je vidět, že dokonce ani jeden z vektorů neleží v lineárním obalu báze V, tedy neplatí ani $U \subset V$. Platí

$$U \cap V = \{0\}.$$

⑤ 5.1 $Ker(A) = \{x \in T : Ax = 0\}$

Pro $\mathbb{R}$ tvrzení ověříme pomocí

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \notin Ker(A)$$

Nad $\mathbb{Z}_5$ je ale situace jiná

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in Ker(A)$$

5.2 $S(A)$ je sloupcový prostor, neboli lin. obal sloupců matice, $S(A) = \{Ax : x \in T\}$

Nad $\mathbb{R}$ je situace

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in S(A)$$

Nad $\mathbb{Z}_5$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \text{nemá řeš.} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \notin S(A)$$

⑥ Upravme matici do odstupňovaného tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řádkový prostor $R(A)$ tvoří tedy např. $(1,2,2,3)$ a $(0,0,1,1)$

Pro sloupcový prostor $S(A)$ máme bázi odpovídající pivotním sloupcům, tedy $(1,2,3)^T$ a $(2,1,1)^T$.

Jádro je řešení homogenní soustavy

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$