# Algoritmická teorie her – příklady na 5. cvičení*

29. října 2023

## 1 Lemkeho–Howsonův algoritmus

*Polyedr nejlepších odpovědí* hráče 1 v maticové hře $G = (\{1,2\}, A, u)$ s výplatními maticemi $M$ a $N$ je polyedrem
$$\overline{P} = \{(x,v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \colon x \geq \mathbf{0}, \mathbf{1}^\top x = 1, N^\top x \leq \mathbf{1}v\}.$$
Pro hráče 2 se jedná o polyedr
$$\overline{Q} = \{(y,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \colon y \geq \mathbf{0}, \mathbf{1}^\top y = 1, My \leq \mathbf{1}u\}.$$

Bod $(x,v)$ polyedru $\overline{P}$ má *značku* $i \in A_1 \cup A_2$, pokud buď $i \in A_1$ a $x_i = 0$ nebo pokud $i \in A_2$ a $(N^\top)_i x = v$. Bod $(y,u)$ polyedru $\overline{Q}$ má značku $i \in A_1 \cup A_2$, pokud buď $i \in A_1$ a $(M)_i y = u$ nebo pokud $i \in A_2$ a $y_i = 0$.

Pro nezáporné matice $M$ a $N^\top$, které nemají nulový sloupec, je *normalizovaným polytopem nejlepších odpovědí* pro hráče 1 polytop
$$P = \{x \in \mathbb{R}^m \colon x \geq \mathbf{0}, N^\top x \leq \mathbf{1}\}.$$
Pro hráče 2 se jedná o polytop
$$Q = \{y \in \mathbb{R}^n \colon y \geq \mathbf{0}, My \leq \mathbf{1}\}.$$
Značky v $P$ a $Q$ jsou definovány analogicky jako u $\overline{P}$ a $\overline{Q}$.

Nashova ekvilibria u nedegenerované hry odpovídají párům vrcholů z $P \times Q \setminus \{(\mathbf{0},\mathbf{0})\}$, které mají všechny značky.

**Příklad 1.** *Nakreslete polyedr nejlepších odpovědí a normalizovaný polytop nejlepších odpovědí pro Hru na kuře. Poté v daných polyedrech nalezněte páry vrcholů, které odpovídají Nashovým ekvilibriím.*

| | Zatočit (3) | Jet rovně (4) |
|---|---|---|
| Zatočit (1) | $(10,10)$ | $(9,11)$ |
| Jet rovně (2) | $(11,9)$ | $(0,0)$ |

Tabulka 1: Hra na kuře.

**Příklad 2.** *Použijte Lemkeho–Howsonův algoritmus a spočítejte Nashova ekvilibria následující hry dvou hráčů:*
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad a \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$
*Výpočet začněte výběrem značky* 2.

*Graf konfigurací* má vrcholy tvořené páry $(x,y)$ vrcholů z $P \times Q$, které jsou *$k$-téměř plně označené*, neboli každá značka z $A_1 \cup A_2 \setminus \{k\}$ je značkou buď bodu $x$ nebo $y$. Vrcholy $(x,y)$ a $(x',y')$ tvoří hranu, pokud buď $x = x'$ a $yy'$ je hranou $Q$ nebo pokud $xx'$ je hranou $P$ a $y = y'$.

**Příklad 3.** *Dokažte, že Lemkeho–Howsonův algoritmus neskončí ve vrcholech tvaru $(x,\mathbf{0})$ či $(\mathbf{0},y)$ v grafu konfigurací.*

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/