Algoritmická teorie her – příklady na 10. cvičení*

4. ledna 2025

1 Bulow–Klemperer theorem

Věta 1 (The Bulow–Klemperer Theorem). *Nechť $F = F_1 = \cdots = F_n$ je regulární pravděpodobnostní rozdělení a nechť n je kladné celé číslo. Pak platí následující nerovnost*

$$\mathbb{E}_{v_1,\dots,v_{n+1}\sim F}\big[\mathrm{Rev}(VA_{n+1})\big] \;\geq\; \mathbb{E}_{v_1,\dots,v_n\sim F}\big[\mathrm{Rev}(OPT_{F,n})\big],$$

kde $\mathrm{Rev}(VA_{n+1})$ *označuje výnos Vickreyovy aukce* VA_{n+1} *s* $n+1$ *účastníky (bez rezervní ceny) a* $\mathrm{Rev}(OPT_{F,n})$ *označuje výnos optimální aukce* $OPT_{F,n}$ *pro rozdělení* F *s* n *účastníky.*

Příklad 1. *Uvažujme aukci s jedinou položkou a $n \geq 2$ dražiteli, kteří si své ohodnocení (valuations) losují z regulárního rozdělení pravděpodobnosti F. Dokažte, že očekávaný výnos (expected revenue) Vickreyovy aukce bez rezervní ceny je alespoň $\frac{n-1}{n}$-násobkem očekávaného výnosu optimální aukce se stejným počtem n dražitelů.*

Nápověda: *Využijte Bulow–Klempererovu větu. Při přidání nového dražitele o kolik se může zvýšit maximálně možný očekávaný výnos aukce?*

2 Multi-parameter mechanism design

Ve *víceparametrickém návrhu mechanismu* uvažujeme následující prostředí:

(a) n strategických dražitelů,

(b) konečnou množinu Ω možných výsledků,

(c) každý účastník i má soukromé ohodnocení $v_i(\omega) \geq 0$ pro každý výsledek $\omega \in \Omega$.

Každý účastník i podává nabídku $b_i(\omega)$ pro každé $\omega \in \Omega$. Naším cílem je navrhnout mechanismus, jenž zvolí výsledek $\omega \in \Omega$ tak, aby maximalizoval *společenský přínos* (social surplus)

$$\sum_{i=1}^{n} v_i(\omega).$$

Věta 2 (Mechanismus Vickrey–Clarke–Groves (VCG)). *V každém víceparametrickém prostředí pro návrh mechanismů existuje mechanismus, který je* DSIC *a maximalizuje společenský přínos.*

Příklad 2. *Dokažte, že platební pravidlo z důkazu mechanismu VCG je vždy nezáporné a shora omezené výrazem $b_i(\omega^*)$. Tedy ukažte, že pro každý vektor nabídek b platí*

$$0 \leq p_i(b) \leq b_i(\omega^*),$$

kde

$$p_i(b) \;=\; \max_{\omega\in\Omega}\left\{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} b_j(\omega)\right\} \;-\; \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} b_j(\omega^*),$$

a

$$\omega^* \;=\; \mathrm{argmax}_{\omega\in\Omega}\sum_{i=1}^{n} b_i(\omega).$$

Příklad 3. *Zvažme aukci tří položek se dvěma dražiteli, označenými* 1 *a* 2*. Tři položky A, B a C jsou draženy současně a každý dražitel může podat nabídku na libovolnou podmnožinu těchto položek. Valuace dražitelů pro každou možnou podmnožinu položek jsou uvedena v Tabulce 1. Jaké jsou výsledky této VCG aukce? Jinými slovy, který z obou dražitelů získá které položky a jaké platby zaplatí každý z nich?*

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/

bidder i	$v_i(\emptyset)$	$v_i(A)$	$v_i(B)$	$v_i(C)$	$v_i(AB)$	$v_i(AC)$	$v_i(BC)$	$v_i(ABC)$
$i = 1$	0	24	4	9	29	38	20	50
$i = 2$	0	15	18	11	30	34	32	47

Tabulka 1: Valuace bidderů z Příkladu 3.

3 Batohové aukce

V jednoparametrickém prostředí předpokládáme, že účastníci (dražitelé) $1, \ldots, n$ jsou uspořádáni v pořadí $<$ tak, že

$$\frac{b_1}{w_1} \geq \cdots \geq \frac{b_n}{w_n}.$$

Zvažme následující *chamtivé alokační pravidlo* $x^G = (x_1^G, \ldots, x_n^G) \in X$, které pro dané nabídky $b = (b_1, \ldots, b_n)$ vybírá podmnožinu účastníků tak, aby $\sum_{i=1}^n x_i^G w_i \leq W$ a to podle tohoto postupu:

1. Postupně volíme vítěze v daném pořadí $<$, dokud se další účastník již nevejde, a poté zastavíme.

2. Vrátíme buď řešení z prvního kroku, nebo účastníka s nejvyšší abídkou, podle toho, které řešení přináší vyšší společenský užitek.

Příklad 4. (a) *Dokažte, že alokační pravidlo knapsackové aukce x^G, které je odvozeno z chamtivého $(1/2)$-aproximačního algoritmu, je monotónní.*

(b) *Dokažte, že v důkazu Věty 3.10 (správnost $(1/2)$-aproximačního algoritmu založeného na x^G) je třeba upravit pouze dva koeficienty α_i a β_j.*