Algoritmická teorie her – příklady na 9. cvičení*

17. prosince 2024

1 Základy návrhu mechanismů

V prostředí s jedním parametrem uvažujeme n dražitelů, z nichž každý soutěží o určitý statek. Každý dražitel i má své soukromé ohodnocení v_i a existuje realizovatelná množina $X \subseteq R^n$ odpovídající realizovatelným výsledkům. Uzavřená podání (sealed-bid) v tomto prostředí probíhají ve třech krocích:

1. Sběr nabídek $b = (b_1, \dots, b_n)$, kde b_i je nabídka dražitele i.
2. Alokační pravidlo: Na základě podaných nabídek b zvolte realizovatelný výsledek (alokaci) $x = x(b)$ z množiny X.
3. Platební pravidlo: Na základě podaných nabídek b zvolte platby $p(b) = (p_1(b), \dots, p_n(b)) \in R^n$.

Dvojice (x, p) tak tvoří (přímý) mechanismus. Užitek dražitele i je definován jako $u_i(b) = v_i \cdot x_i(b) – p_i(b)$.

Aukce je pobídkově kompatibilní s dominantní strategií (DSIC), pokud splňuje následující dvě podmínky. Každý dražitel má dominantní strategii: říci pravdu, tedy nastavit svou nabídku b_i rovnu svému soukromému ohodnocení v_i. Navíc je užitek každého dražitele, který říká pravdu, zaručeně nezáporný. Příkladem DSIC aukce je Vickreyova aukce, kde vyhrává nejvyšší nabídka a vítěz platí druhou nejvyšší nabídku.

Alokační pravidlo x je realizovatelné (implementable), pokud existuje platební pravidlo p, které z mechanismu (x, p) učiní DSIC. Alokační pravidlo x je monotonní, pokud pro každého dražitele i a libovolné nabídky b_{-i} ostatních dražitelů je při změně jeho nabídky z na jinou hodnotu z' splněno, že $x_i(z; b_{-i})$ je neklesající funkcí jeho nabídky z.

Theorem 1 (Myersonovo lemma)**.** *V jednoparametrových prostředích platí následující tři tvrzení.*

(a) *Alokační pravidlo je implementovatelné právě tehdy, když je monotónní.*

(b) *Je-li alokační pravidlo x monotónní, pak existuje jediné platební pravidlo p takové, že mechanismus (x, p) je DSIC (za předpokladu, že $b_i = 0$ implikuje $p_i(b) = 0$).*

(c) *Platební pravidlo p je určené následujícím vzorcem*

$$p_i(b_i; b_{-i}) = \int_0^{b_i} z \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} x_i(z; b_{-i}) \, \mathrm{d}z$$

pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$.

Exercise 1. *Uvažme 1-položkovou aukci s aspoň třemi kupujícími. Dokažte, že prodáním dražené položky kupujícímu s nejvyšší nabídkou za cenu, která se rovná třetí nejvyšší nabídce, dostaneme aukci, která není DSIC.*

Exercise 2. *Použitím Myersonova lemma dokažte, že Vickreyho aukce je jedinou jednopoložkovou aukcí, která je DSIC a která vždy vybere kupujícího s nejvyšší valuací zatímco ostatním kupujícím naúčtuje 0.*

Exercise 3. *Dokažte, že alokační pravidlo x^G z Batohové aukce indukované hladovým (1/2)-aproximačním algoritmem je monotónní.*

Exercise 4. *Uvažujte aukci s jednou položkou, kde vítězem se stane dražitel s nejvyšší nabídkou a zaplatí cenu odpovídající druhé nejvyšší nabídce sníženou o 10%. Například, pokud jsou nabídky $b = (11, 7, 10)$, vítězem je dražitel 1 a platí 10 · 0,9 = 9. Dokážete v této aukci najít dominantní strategii? Je jí pravdomluvnost?*

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~sychrovsky/

Exercise 5. *Předpokládejme, že máme k identických položek a $n > k$ dražitelů. Předpokládejme také, že každý dražitel může získat nanejvýš jednu položku. Jaký je analog druhocenové aukce v této situaci? Je to tak, že dražitel s j-tou nejvyšší nabídkou zaplatí $(j+1)$-ní nejvyšší nabídku pro $j \leq k$? Dokažte, že vaše navrhovaná aukce je DSIC.*