

Algoritmická teorie her – příklady na 3. cvičení*

25. října 2023

1 Maticové hry

Maticová hra je hrou v normálním tvaru pro 2 hráče. Maticová hra je *nedegenerovaná*, pokud každý hráč má nanejvýš k nejlepších odpovědí na každou strategii s doménou velikosti k . *Maticová hra* s nulovým součtem je hra, kde užitek jednoho hráče se vždy rovná ztrátě druhého. U maticové hry $G = (\{1, 2\}, A, u)$ s $A_1 = \{1, \dots, m\}$ a $A_2 = \{1, \dots, n\}$ používáme výplatní matice M a N , kde $(M)_{i,j} = u_1(i, j)$ a $(N)_{i,j} = u_2(i, j)$ pro všechna $i \in A_1$ and $j \in A_2$.

Na přednášce jsme si ukazovali následující algoritmus pro výpočet Nashových ekvilibrií nedegenerovaných maticových her.

Algorithm 1.1: SUPPORT ENUMERATION(G)

Input : Nedegenerovaná maticová hra G .

Output : Všechna Nashova ekvilibria hry G .

for každé $k \in \min\{m, n\}$ a dvojici domén (I, J) velikosti k

$\left\{ \begin{array}{l} \text{vyřešte systém rovností } (N^\top)_j x = v, (M)_i y = u, \sum_{i \in I} x_i = 1, \\ \sum_{j \in J} y_j = 1 \\ \text{pokud } x, y \geq \mathbf{0} \text{ a } u = \max\{(M)_{k,y} : k \in A_1\}, v = \max\{(N^\top)_k x : k \in A_2\}, \\ \text{pak vraťte } (x, y) \text{ jako Nashovo ekvilibrium} \end{array} \right.$

Příklad 1. Použijte algoritmus *Support enumeration* z přednášky a nalezněte Nashovo ekvilibrium Hry na kuře s doménami velikosti 2.

	Zatočit (1)	Jet rovně (2)
Zatočit (1)	(0,0)	(-1,1)
Jet rovně (2)	(1,-1)	(-10,-10)

Tabulka 1: Hra na kuře.

Příklad 2. Rozhodněte, zda je tato hra degenerovaná a nalezněte všechna Nashova ekvilibria této hry. Čím se množina všech ekvilibrií liší od dříve spočítaných příkladů?

	Spolupracovat (1)	Odpálit bombu (2)
Spolupracovat (1)	(0,0)	(0,1)
Odpálit bombu (2)	(1,0)	(0,0)

Tabulka 2: Hra o duši Gotham.

Příklad 3. Rozhodněte, které z těchto výplatních matic určují degenerované hry.

$$(a) M = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ a } N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>

$$(b) M = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ a } N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 4. Dokažte, že následující lineární programy z důkazu Minimaxové věty jsou navzájem duální.

(a) Pro matici $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

	Program P	Program D
Proměnné	y_1, \dots, y_n	x_0
Účelová funkce	$\min x^T M y$	$\max x_0$
Omezení	$\sum_{j=1}^n y_j = 1,$ $y_1, \dots, y_n \geq 0.$	$\mathbf{1}x_0 \leq M^T x.$

(b) Pro matici $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

	Program P'	Program D'
Proměnné	y_0, y_1, \dots, y_n	x_0, x_1, \dots, x_m
Účelová funkce	$\min y_0$	$\max x_0$
Omezení	$\mathbf{1}y_0 - M y \geq \mathbf{0},$ $\sum_{j=1}^n y_j = 1,$ $y_1, \dots, y_n \geq 0.$	$\mathbf{1}x_0 - M^T x \leq \mathbf{0},$ $\sum_{i=1}^m x_i = 1,$ $x_1, \dots, x_m \geq 0.$

Můžete použít kuchařku na vytváření duálních programů z přednášky.

Příklad 5. Dokažte, že jsou-li (s_1, s_2) a (s'_1, s'_2) smíšená Nashova ekvilibria ve hře s nulovým součtem, tak potom jsou jimi i profily (s_1, s'_2) a (s'_1, s_2) .

	Primární úloha	Duální úloha
Proměnné	$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$	$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$
Matrice	$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$	$A^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$
Pravá strana	$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$	$\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$
Účelová funkce	$\max \mathbf{c}^T \mathbf{x}$	$\min \mathbf{b}^T \mathbf{y}$
Podmínky	i -tá podmínka má \leq	$y_i \geq 0$
	\geq	$y_i \leq 0$
	$=$	$y_i \in \mathbb{R}$
	$x_j \geq 0$	j -tá podmínka má \geq
	$x_j \leq 0$	\leq
	$x_j \in \mathbb{R}$	$=$