

# Algoritmická teorie her – příklady na 10. cvičení\*

4. ledna 2024

## 1 Bulowova–Klempererova věta a více-parametrický mechanism design

**Věta 1** (The Bulow–Klemperer Theorem). *Nechť jsou  $F = F_1 = \dots = F_n$  regulární rozdělení pravděpodobnosti a buď  $n$  přirozené číslo. Potom platí následující nerovnost*

$$\mathbb{E}_{v_1, \dots, v_{n+1} \sim F} [\text{Rev}(VA_{n+1})] \geq \mathbb{E}_{v_1, \dots, v_n \sim F} [\text{Rev}(OPT_{F,n})], \quad (1)$$

kde  $\text{Rev}(VA_{n+1})$  označuje zisk Vickreyho aukce  $VA_{n+1}$  s  $n+1$  kupujícími (a žádnou rezervou) a  $\text{Rev}(OPT_{F,n})$  značí zisk optimální aukce  $OPT_{F,n}$  při  $F$  s  $n$  kupujícími.

Více-parametrický mechanism design označuje následující nastavení:

- $n$  racionálních účastníků (neboli kupujících),
- konečná množina  $\Omega$  výstupů,
- každý kupující  $i$  má soukromé ohodnocení  $v_i(\omega) \geq 0$  pro každý výstup  $\omega \in \Omega$ .

Každý kupující  $i$  odešle svou nabídku  $b_i(\omega)$  pro každé  $\omega \in \Omega$  a a nším cílem je navrhnout mechanismus, který zvolí výstup  $\omega \in \Omega$  maximalizující sociální přebytek  $\sum_{i=1}^n v_i(\omega)$ .

**Věta 2** (Vickrey–Clarke–Groves (VCG) mechanismus). *V každém více-parametrickém mechanismu existuje DSIC mechanismus maximalizující sociální přebytek.*

**Příklad 1.** *Dokažte, že platební pravidlo z důkazu VCG mechanismu je vždy nezáporné a shora omezené hodnotou  $b_i(\omega^*)$ . Neboli ukažte, že  $0 \leq p_i(b) \leq b_i(\omega^*)$  pro každý vektor  $b$  nabídek, kde*

$$p_i(b) = \max_{\omega \in \Omega} \left\{ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n b_j(\omega) \right\} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n b_j(\omega^*)$$

a

$$\omega^* = \operatorname{argmax}_{\omega \in \Omega} \sum_{i=1}^n b_i(\omega).$$

**Příklad 2.** *Uvažte 3-položkovou aukci se dvěma kupujícími 1 and 2. Tři položky A, B a C jsou draženy najednou a každý kupující může dát nabídku na libovolnou podmnožinu položek. Ohodnocení kupujících pro jednotlivé podmnožiny položek jsou uvedeny v Tabulce 1. Jaký je výstup VCG aukce?*

bidder $i$	$v_i(\emptyset)$	$v_i(A)$	$v_i(B)$	$v_i(C)$	$v_i(AB)$	$v_i(AC)$	$v_i(BC)$	$v_i(ABC)$
$i = 1$	0	24	4	9	29	38	20	50
$i = 2$	0	15	18	11	30	34	32	47

Tabulka 1: Ohodnocení kupujících z Příkladu 2.

*Neboli kteří kupující získají které položky a kolik každý zaplatí?*

**Příklad 3.** *Uvažte 1-položkovou aukci s  $n \geq 2$  kupujícími, kteří svá ohodnocení volí podle regulárního rozdělení pravděpodobnosti  $F$ . Dokažte, že střední hodnota zisku Vickreyho aukce bez rezervy je aspoň  $\frac{n-1}{n}$ -zloemek střední hodnoty zisku optimální aukce se stejným počtem  $n$  kupujících.*

*Nápověda: použijte Bulowovu–Klempererovu větu. Když přidáme jednoho kupujícího, o kolik může maximální střední hodnota zisku vzrůst?*

\*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>