Domácí úkoly z první hodiny

Tyhle příklady jsou trochu těžší, takže doporučuji spíše nadšencům.

1.1 Zjistěte, čemu se rovná:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} = ?$$

Cílem je vzorec, který již nebude obsahovat sumu (ani "...").
Hint: spočtěte si výsledek pro několik malých hodnot n, vyslovte hypotézu a dokažte ji indukcí.

(4 body)

1.2 Ukažte, že pro libovolná $n, m \in \mathbb{N}; n \geq m$ platí:

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \binom{n+k}{m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \binom{n}{k} 2^k.$$

(4 body)

2. série domácích úkolů

2.1 V závislosti na $b \in \mathbb{R}; b > 1$ nalezněte $q := q(b)$ takové, ?e

$$\frac{2^{qn}}{n^{O(1)}} \leq \binom{bn}{n} \leq 2^{qn} \cdot n^{O(1)}$$

.

(3 body)

2.2 Rozhodněte, zda pro následující funkce $f(n)$ a $g(n)$ platí $f(n) = O(g(n)), f(n) = o(g(n)), f(n) = \Omega(g(n)), f(n) = \Theta(g(n))$ a $f(n) \sim g(n)$. Tj. pro každou z uvedených relací a každou uvedenou dvojici funkcí rozhodněte, zda pro danou dvojici funkcí daná relace platí či ne. Odpovědi nezapomeňte zdůvodnit.

a) $f(n) = \ln \binom{n^2}{n}$, $g(n) = 2n \cdot \ln n$

(2 body)

b)

$$f(n) = \sum_{i=1}^{n} i^{\frac{3}{2}}, g(n) = n^{\frac{5}{2}}$$

(3 body)

2.3 Seřaďte následující funkce podle rychlosti růstu.

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{\ln n}, 2^{\ln^2 n}, (\ln n)^{\ln n \cdot \ln \ln n}, \frac{n^{\ln n}}{2}$$

(2 body)

3. série domácích úkolů

3.1 Určete počet grafů na n-prvkové množině vrcholů, které nemají žádný izolovaný vrchol.

(3 body)

3.2 Nechť $X = -23, -22, ..., 186$ a nechť množina Y vznikne z množiny X tak, že z ní vyškrtáme všechny násobky čísel $6, 9, 15, 18, 24, 30$. Zjistěte, kolik prvků obsahuje množina Y.

(2 body)

3.3 O přirozeném čísle n řekneme, že je bezčtvercové pokud n není dělitelné číslem k^2, pro žádné $k \geq 2$ přirozené. Zjistěte kolik bezčtvercových čísel se nachází v intervalu $134, 135, ..., 522$.

(2 body)

3.4 Kolik existuje pořadí písmen A,C,F,K,L,M,N,O,P,R,S,T,U,V,Y takových, že po vynechání několika písmen nevznikne žádné ze slov ROCK, CAROL, FOLK, COUNTRY ?

(4 body)

4. série domácích úkolů

4.1 Najděte vytvořující funkci pro následující posloupnost:

$$1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, ...$$

(2 body)

4.2 S využitím výsledku předchozího příkladu najděte vytvořující funkci pro posloupnost $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$, pro jejíž n-tý člen platí:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} k^3$$

Poté najděte vzorec bez sum pro n-tý člen této posloupnosti (z té vytvořující funkce).

(3 body)

4.3 Najděte vytvořující funkci pro následující posloupnost:

$$1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, ...$$

(1 bod)

4.4 Najděte vytvořující funkci pro následující posloupnost:

$$1, 1, 2, 3, 4, 9, 8, 27, 16, 81, 32, 243, 64, ...$$

(1 bod)

4.5 Najděte vytvořující funkci pro následující posloupnost:

$$1, 2, -4, 8, 16, -32, 64, 128, -256, 512, 1024, -2048, 4096, ...$$

(2 body)

4.6 V závislosti na n najděte vytvořující funkci pro posloupnost $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$, pro jejíž k-tý člen platí:

$$a_k = \binom{n}{k}.$$

(2 body)

5. série domácích úkolů

5.1 Určete koeficient při x^{50} v mocninné řadě $(x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + \ldots)^6$.

(1 bod)

5.2 Určete koeficient při x^4 v mocninné řadě funkce $(2 + 3x)^5\sqrt{1 - x}$.

(3 body)

5.3 Určete koeficient při x^3 v mocninné řadě $(1 - x + 2x^2)^9$.

(1 bod)

5.4 Určete koeficient při x^3 v mocninné řadě funkce $\frac{(4+5x)^6}{1-x}$.

(2 body)

5.5 Pomocí vytvořujících funkcí určete, kolika způsoby lze rozdělit 40 nerozlišitelných balónků mezi 6 dětí tak, aby každé dítě dostalo aspoň jeden balónek. Navíc žádné dítě nesmí dostat balónků příliš mnoho. Pokud Anežka (nejhubenější z těch šesti dětí) dostane desátý balónek, vznese se – to nevadí, ale nelze jí už dát další (jedenáctý) balónek. Ostatní se vznesou až po obdržení 15-tého balónku. Nemohou jich tedy mít nikdy 16 nebo více.

(3 body)

6. série domácích úkolů

V příkladech této série můžete s výhodou použít některý z programů pro řešení rovnic, takové nástroje jsou dostupné i online, například na
`http://www.quickmath.com/webMathematica3/quickmath/page.jsp?s1=equations&s2=solve&s3=advanced`. Všechny rovnice ale mají racionální kořeny.

6.1 Pomocí vytvořujících funkcí najděte vzorec pro n-tý člen následující posloupnosti zadané rekurentně:

$$a_0 = 4, a_1 = 20, a_2 = a_3 = 14$$

$$\text{a pro } n \geq 0 \text{ platí } a_{n+4} = 2a_{n+3} + 27a_{n+2} + 26a_{n+1} - 120a_n$$

(4 body)

6.2 Pomocí vytvořujících funkcí najděte vzorec pro n-tý člen následující posloupnosti zadané rekurentně:

$$a_0 = a_1 = 3, \text{a pro } n \geq 0 \text{ platí } 2a_{n+2} = 7a_{n+1} + 3a_n$$

(2 body)

6.3 Pomocí vytvořujících funkcí najděte vzorec pro n-tý člen následující posloupnosti zadané rekurentně:

$$a_0 = 1, a_1 = 4, \text{a pro } n \geq 0 \text{ platí } a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$$

(3 body)

6.4 Pomocí vytvořujících funkcí najděte vzorec pro n-tý člen následující posloupnosti zadané rekurentně:

$$a_0 = 4, a_1 = 1, \text{a pro } n \geq 0 \text{ platí } a_{n+2} = 3a_{n+1} + 4a_n + n + 1$$

(4 body)

6.5 Pomocí vytvořujících funkcí najděte vzorec pro závislost n-tého členu na členech a_0 a a_1 v posloupnosti v níž pro $n \geq 0$ platí, že a_{n+2} je aritmetickým průměrem a_{n+1} a a_n. Určete limitu posloupnosti a_n pro $n \to \infty$ (v závislosti na a_0 a a_1). (2 body)

7. série domácích úkolů

7.1 Pro $n > 3$ vezměme n navzájem různých množin $A_1, A_2, \ldots, A_n$, každou o velikosti $n - 3$, jejichž sjednocením je množina X velikosti n. Dokažte, že $A_1, A_2, \ldots, A_n$ má systém různých reprezentantů.

(3 body)

7.2 Nechť G je neorientovaný rovinný graf. Dokažte, že existuje orientace G taková, že vstupní stupeň každého vrcholu je nejvýše 3.

(3 body)

7.3 Nechť n je přirozené číslo a X je množina s $n^2 + n + 1$ prvky. Nechť $\mathcal{S}$ je sytém $n + 1$ prvkových podmnožin X takový, že každé dvě množiny $\mathcal{S}$ mají nejvýše jeden společný prvek a $|\mathcal{S}| = n^2 + n + 1$. Ukažte, že $\mathcal{S}$ má sytém různých reprezentantů.

(3 body)

7.4 Dokažte, že CNF-formule, která má v každé klausuli právě n proměnných a každá proměnná se vyskytuje nejvýše n-krát (tzv. $(n, \leq n)$-SAT) je vždy splnitelná.
CNF-formule je logická formule (výraz) ve formě konjunkce (logického součinu, AND) klauzulí, přičemž každá klauzule je disjunkcí (logickým součtem, OR) literálů, což jsou buďto proměnné nebo jejich negace (NOT). Formule je splnitelná pokud je možno dosadit za proměnné pravdivostní hodnoty (0, 1; *true, false*) tak, aby celá formule byla pravdivá (hodnota výrazu byla *true*). Příklad:

$$F = (x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3)$$

(5 bodů)

7.5 Nechť Q_n (pro $n \leq 1$) je orientovaný graf (n-dimenzionální krychle) s množinou vrcholů $\{0, 1\}^n$ takový, že z vrcholu u vede orientovaná hrana do vrcholu v právě, když se příslušné vektory liší pouze na jediném místě a na tom má vrchol u nulu a vrchol v jednotku. Položme kapacitu každé hrany 1 a $z = (0, 0, .., 0)$, $s = (1, 1, .., 1)$. Najděte

a) maximální celočíselný tok v této síti

(2 body)

b) maximální tok, který je na všech hranách nenulový.

(3 body)

8. série domácích úkolů

8.1 Dokažte, že graf na n vrcholech s minimálním stupněm $d \geq \frac{1}{2}(n-1)$ je hranově d-souvislý.

(3 body)

8.2 Pro $d \geq 2$ ukažte, že souvislý d-regulární bipartitní graf je

a) hranově, nebo (2 body)

b) vrcholově (3 body)

2-souvislý. (Ukažte a) nebo b).)

8.3 Pro $n \geq 3$ určete vrcholovou souvislost grafu $K_n \setminus C_n$, tj. úplného grafu na n vrcholech, z nějž byly odebrány hrany jedné Hamiltonovské kružnice.

(2 body)

8.4 Ve (vrcholově) k-souvislém grafu ($k \geq 2$) leží každých k vrcholů na kružnici. Hint:použijte indukci.

(3 body)

9. série domácích úkolů

9.1 Rozhodněte, zda posloupnost $(4, 1, 5, 1, 2, 6, 6, 5, 6, 2, 1, 5)$ je skóre grafu.

(1 bod)

9.2 Rozhodněte, zda posloupnost $(5, 1, 6, 2, 4, 4, 2)$ je skóre grafu.

(1 bod)

9.3 Rozhodněte, zda posloupnost $(4, 10, 1, 7, 1, 8, 5, 5, 7, 1, 8, 6)$ je skóre grafu.

(1 bod)

9.4 Najděte všechny navzájem neisomorfní grafy se skórem $(6, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$. Nezapomeňte ukázat, že jste žádný nevynechali.

(2 body)

10. série domácích úkolů

10.1 Hrany úplného grafu na n vrcholech (aspoň dvou) jsou obarveny 2 barvami (červeně a modře). Ukažte, že v grafu existuje jednobarevná kostra.

(2 body)

10.2 Mřížové body (body s celočíselnými souřadnicemi) v rovině jsou obarveny 2010 barvami. Ukažte, že v rovině lze vybrat 2010 řádků (rovnoběžek s osou x) a 2008 sloupců (rovn. s osou y) tak, že všechny jejich průsečíky mají stejnou barvu.

(3 body)

10.3 Rozhodněte zda platí: Každý dostatečně velký souvislý graf obsahuje indukovaný podgraf s právě

a) 15i hranami.

b) 27i hranami.

(6+2 body)

10.4 Rozhodněte, zda platí: Pro každé přirozené číslo k existuje takové přirozené číslo n, že kdykoliv je X nějaká množina velikosti n a prvky $X \times X$ jsou obarveny dvěma barvami, pak existuje podmnožina Y množiny X velikosti $|Y| = k$ taková, že všechny prvky $(Y \times Y) \setminus \Delta Y$ jsou obarveny stejnou barvou. Zde $\Delta Y := \{(y, y) \mid y \in Y\}$.

(3 body)