8. megasérie

8.1 Na velice formální oslavě je 7 lidí. V jejím průběhu si některé dvojice lidí potřesou rukou. Je možné, aby si každý potřásl rukou s přesně 3 lidmi?

(1 bod)

8.2 Zobecnění předchozího příkladu: Pro která $n; k \in N$ existuje k-regulární graf na n vrcholech.

(3 body)

8.3 Jsou každé dva $(n-2)$-regulární grafy na n vrcholech izomorfní?

(2 body)

8.4 Najděte všechny grafy, které neobsahují cestu délky 3 jako podgraf (a dokažte, že jiné nejsou).

(3 body)

8.5 Najděte všechny grafy, které neobsahují cestu délky 2 jako indukovaný podgraf (a dokažte, že jiné nejsou).

(2 body)

8.6
- a) Spočítejte počet kružnic délky k v grafu K_n.
- b) Spočítejte počet kružnic délky k v grafu $K_{m,n}$.
- c) Pro které k je při pevném n počet kružnic délky k v K_n největší?

(2+3+4 body)

8.7 V závislosti na n spočítejte počet komponent grafu, jehož vrcholy jsou políčka šachovnice

a) $2 \times n$

b) $3 \times n$

a hrany spojují políčka, mezi kterými lze táhnout koněm.

(3 body)

8.8 Kolik nejméně a nejvíce hran může mít graf s k komponentami na n vrcholech?
Kolik jich může mít takový rovinný graf?

(4 body)

8.9 Graf G nazveme *vnějškově rovinným*, existuje-li jeho nakreslení v němž hranice některé ze stěn (obvykle té vnější) obsahuje všechny vrcholy. Dokažte, že každý vnějškově rovinný graf lze obarvit třemi barvami.

(4 body)

8.10 Uvažme rovinný graf, jehož všechny stupně jsou sudé. Ukažte, že stěny jeho libovolného nakresleni lze obarvit dvěma barvami tak, že každá hrana sousedí právě s jednou stěnou každé barvy (tj. dvě stěny se kterými sousedí mají různou barvu). Jinými slovy graf duální k tomuto nakreslení lze obarvit dvěma barvami.

(4 body)

8.11 Ukažte, že každý rovinný graf bez trojúhelníků na n vrcholech obsahuje nezávislou množinu (indukovaný podgraf bez hran) na alespoň $\lceil \frac{1}{3}n \rceil$ vrcholech.

(1 body)