8. Lineární závislost a nezávislost

Cv. 8.1 Diskutujte, kdy je systém jednoho resp. dvou resp. tří vektorů lineárně závislý.

Řešení:

1 vektor: Aby množina s jedním vektorem byla lineárně závislá, tak ten vektor musí být nulový.

2 vektory: Aby množina dvou vektorů byla lineárně závislá, jeden vektor musí být násobek druhého.

3 vektory: V tomto případě jeden vektor je lineární kombinací ostatních, ale nemusí být nutně jeden vektor násobek nějakého jiného.

Cv. 8.2 Zjistěte zda jsou vektory z $\mathbb{R}^3$ lineárně nezávislé:

(a) $(2,3,-5)^T$, $(1,-1,1)^T$, $(3,2,-2)^T$.

(b) $(2,0,3)^T$, $(1,-1,1)^T$, $(0,2,1)^T$.

Řešení:

Vektory $x_1,\ldots,x_k$ jsou lineárně nezávislé, pokud jediná lineární kombinace

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = 0$$

má všechny koeficienty $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$. Problém nalezení koeficientů této lineárně kombinace převedeme na hledání řešení soustavy lineárních rovnic.

(a) Hledáme koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Převedením na řešení soustav lineárních rovnic dostáváme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Jediným řešením této soustavy je vektor $(0,0,0)^T$, vektory jsou proto lineárně nezávislé.

(b) Opět sestavíme soustavu rovnic

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

kterou převedeme na odstupňovaný tvar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Soustava má tedy i netriviální řešení a vektory jsou proto lineárně závislé. Pro úplnost doplníme, že množina řešení soustavy je $\{(-x_3, 2x_3, x_3)^T;\ x_3 \in \mathbb{R}\}$. Tedy například pro $x_3 = 1$ máme

$$-1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cv. 8.3 Nechť u, v, w jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru V nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda-li jsou následující množiny lineárně nezávislé.

(a) $\{u, v, o\}$,

(b) $\{w, v, u\}$,

(c) $\{u,\ u+v,\ u+w\}$,

(d) $\{u-v,\ u-w,\ v-w\}$.

Řešení:

(a) Lineárně závislé, neboť

$$0 \cdot u + 0 \cdot v + 1 \cdot o = o.$$

(b) Lineárně nezávislé, neboť jsou to ty samé vektory, jenom v jiném pořadí. Změnou pořadí se lineární (ne)závislost vektorů nemění (proč?).

(c) Zde už to očividné není, tak postupujeme obdobně jako v předchozím cvičení 8.2. Hledáme koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ takové, aby

$$0 = \alpha_1 u + \alpha_2(u+v) + \alpha_3(u+w) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)u + \alpha_2 v + \alpha_3 w.$$

Protože u, v, w jsou lineárně nezávislé, musí být $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, $\alpha_2 = 0$ a $\alpha_3 = 0$ a tedy i $\alpha_1 = 0$. Proto je množina vektorů $\{u, u+v, u+w\}$ lineárně nezávislá.

(d) Obdobně jako v předchozím případě hledáme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ takové, že

$$0 = \alpha_1(u-v)+\alpha_2(u-w)+\alpha_3(v-w) = (\alpha_1+\alpha_2)u+(-\alpha_1+\alpha_3)v+(-\alpha_2-\alpha_3)w.$$

Z lineární nezávislosti u, v, w dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 0, \\ -\alpha_1 + \alpha_3 &= 0, \\ -\alpha_2 - \alpha_3 &= 0. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy je množina $\{(\alpha_3, -\alpha_3, \alpha_3)^T;\ \alpha_3 \in \mathbb{R}\}$. Množina $\{u-v, u-w, v-w\}$ je tedy lineárně závislá, např. pro $\alpha_3 = 1$ máme

$$1 \cdot (u-v) - 1 \cdot (u-w) + 1 \cdot (v-w) = o.$$

Cv. 8.4 Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{T}$ a mějme dvě množiny vektorů $X \subseteq Y \subseteq V$. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

(a) Je-li X nezávislá, pak je Y závislá.

(b) Je-li X nezávislá, pak je Y nezávislá.

(c) Je-li X závislá, pak je Y závislá.

(d) Je-li Y nezávislá, pak je X nezávislá.

(e) Je-li Y závislá, pak je X závislá.

Řešení:

Obecně dle definice se dá odvodit, že nezávislost se přenáší „dolů“ a závislost „nahoru“. Konkrétně:

(a) Neplatí: $X = \{(1,0)^T\}$ a $Y = \{(1,0)^T, (0,1)^T\}$ jsou obě nezávislé v $\mathbb{R}^2$.

(b) Neplatí: $X = \{(1,0)^T\}$ je nezávislá, ale $Y = \{(1,0)^T, (2,0)^T\}$ je už závislá v $\mathbb{R}^2$.

(c) Platí. Mějme $X = \{v_1, \ldots, v_\ell\}$ a $Y = \{v_1, \ldots, v_\ell, w_1 \ldots, w_k\}$. Podle předpokladu je množina X závislá, tedy existují $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell \in \mathbb{T}$ takové, že $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell) \neq (0, \ldots, 0)$ a

$$\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i x_i = 0.$$

Vezměme $\beta_1, \ldots, \beta_k = (0, \ldots, 0)$. Pak stále platí, že $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell, \beta_1, \ldots, \beta_k) \neq (0, \ldots, 0)$ a

$$\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i v_i + \sum_{j=1}^{k} \beta_j w_j = 0$$

je netriviální lineární kombinace vektorů z Y, která se rovná 0. Množina Y je tedy také lineární závislá.

(d) Platí. Jde o obměnu bodu (c).

(e) Neplatí: $Y = \{(1,0)^T, (2,0)^T\}$ je závislá, ale $X = \{(1,0)^T\}$ je nezávislá v $\mathbb{R}^2$.

Cv. 8.5 Rozhodněte, zda vektory $(0,1,1,1)^T$, $(1,0,1,1)^T$, $(1,1,0,1)^T$, $(1,1,1,0)^T$ jsou lineárně závislé v $\mathbb{R}^4$ resp. v $\mathbb{Z}_3^4$.

Řešení:

Úlohu řešíme stejně jako ve cvičení 8.2, jen jednou počítáme nad tělesem $\mathbb{R}$ a podruhé nad $\mathbb{Z}_3$. Zjistíme, že nad $\mathbb{R}$ jsou vektory lineárně nezávislé. Nad $\mathbb{Z}_3$ jsou ale lineárně závislé, například

$$1 \cdot (0,1,1,1)^T + 1 \cdot (1,0,1,1)^T + 1 \cdot (1,1,0,1)^T + 1 \cdot (1,1,1,0)^T = o.$$

Vidíme tedy, že lineární závislost/nezávislost závisí na volbě tělesa vektorového prostoru.

Cv. 8.6 Buďte U, V podprostory prostoru W. Dokažte, že $U \cap V = \{o\}$ právě tehdy, když každý vektor $x \in U + V$ se dá jednoznačně zapsat jako $x = u + v$, kde $u \in U$, $v \in V$.

Řešení:
Ekvivalenci dokážeme tak, že ukážeme zvlášť obě implikace.

„⇒“ Z definice spojení prostorů se každý vektor $x \in U + V$ dá zapsat jako $x = u + v$, kde $u \in U$, $v \in V$. Musíme tedy ukázat jednoznačnost tohoto vyjádření. Pro spor mějme dvě vyjádření vektoru x,

$$u_1 + v_1 = x = u_2 + v_2$$

pro $u_1, u_2 \in U$ a $v_1, v_2 \in V$. Rovnost upravíme na

$$u_1 - u_2 = v_2 - v_1.$$

Vektor $u_1 - u_2$ leží v U a vektor $v_2 - v_1$ leží ve V. Z předpokladu je $U \cap V = \{0\}$, čili $u_1 - u_2 = v_2 - v_1 = 0$. Z toho ale vyplývá, že $u_1 = u_2$ a $v_1 = v_2$ a vyjádření x je tedy jednoznačné. Spor.

„⇐“ Opět postupujeme sporem. Předpokládejme, že existuje nenulový vektor $w \in U \cap V$. Pak tento vektor můžeme vyjádřit dvěma různými způsoby (první sčítanec je z U, druhý sčítanec je z V):

$$w = w + o = o + w.$$

Cv. 8.7 Určete, zda následující množiny vektorů jsou lineárně nezávislé v prostoru reálných funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (nad tělesem $\mathbb{R}$).

(a) $\{2x - 1,\ x - 2,\ 3x\}$.

(b) $\{x^2 + 2x + 3,\ x + 1,\ x - 1\}$.

(c) $\{\sin x,\ \cos x\}$.

Řešení:

(a) Označme $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x - 2$ a $h(x) = 3x$. Pak hledáme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ takové, že $\alpha_1 \cdot f(x) + \alpha_2 \cdot g(x) + \alpha_3 \cdot h(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Dostáváme

$$\alpha_1 \cdot (2x - 1) + \alpha_2 \cdot (x - 2) + \alpha_3 \cdot 3x = (2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3) \cdot x + (-\alpha_1 - 2\alpha_2) = 0.$$

Rovnost je splněna pro všechna x právě tehdy, když je nulový absolutní člen i koeficient u proměnné x:

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0, \\ -\alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0. \end{aligned}$$

Množina řešení této soustavy je $\{(-2x_3, x_3, x_3)^T;\ x_3 \in \mathbb{R}\}$. Množina $\{2x - 1,\ x - 2,\ 3x\}$ je tedy lineárně závislá, např. pro $x_3 = 1$ máme

$$-2 \cdot (2x - 1) + 1 \cdot (x - 2) + 1 \cdot (3x) = 0.$$

(b) Opět hledáme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\alpha_1 \cdot (x^2 + 2x + 3) + \alpha_2 \cdot (x + 1) + \alpha_3 \cdot (x - 1) = 0,$$

neboli

$$\alpha_1 \cdot x^2 + (2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \cdot x + (3\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) = 0.$$

Aby byl polynom nulový pro všechna $x \in \mathbb{R}$, musí být všechny koeficienty polynomu nulové. Z toho dostaneme homogenní soustavu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Tato soustava má jediné řešení $(0, 0, 0)^T$, polynomy jsou tedy lineárně nezávislé.

(c) Hledáme řešení rovnice

$$\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x = 0,$$

čili taková $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, aby rovnice byla splněna pro každé $x \in \mathbb{R}$. Protože nemůžeme sestavit soustavu rovnic podobně jako v předchozích podúlohách, snažíme se nalézt takové $x \in \mathbb{R}$, pro které vynutíme z rovnosti konkrétní hodnoty α_1, α_2. Pokud dosadíme $x = 0$, dostaneme $\alpha_2 = 0$, protože $\sin 0 = 0$ a $\cos 0 = 1$. Pokud dosadíme $x = \frac{\pi}{2}$, pak nutně $\alpha_1 = 0$, protože $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ a $\cos \frac{\pi}{2} = 0$. Aby byla rovnice splněna, nutně musí $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Zároveň vidíme, že $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ splňují tuto rovnici. Funkce jsou tedy lineárně nezávislé.

Cv. 8.8 Najděte čtyři lineárně závislé vektory z $\mathbb{R}^4$ tak, aby:

(a) právě jeden vektor byl lineárně závislý na ostatních,

(b) právě dva vektory byly lineárně závislé na ostatních třech,

(c) právě tři vektory byly lineárně závislé na ostatních třech,

(d) každý z nich byl lineárně závislých na ostatních třech,

Řešení:

(a) Například e_1, e_2, e_3, o (ten poslední).

(b) Například e_1, e_2, e_3, $2e_3$ (ty poslední dva).

(c) Například e_1, e_2, e_3, $e_2 + e_3$ (ty poslední tři).

(d) Například e_1, e_2, e_3, $e_1 + e_2 + e_3$.