

8. Lineární závislost a nezávislost

Cv. 8.1 Diskutujte, kdy je systém jednoho resp. dvou resp. tří vektorů lineárně závislý.

Cv. 8.2 Zjistěte zda jsou vektory z $\mathbb{R}^3$ lineárně nezávislé:

(a) $(2, 3, -5)^T, (1, -1, 1)^T, (3, 2, -2)^T$.

(b) $(2, 0, 3)^T, (1, -1, 1)^T, (0, 2, 1)^T$.

Cv. 8.3 Nechtě u, v, w jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru V nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda-li jsou následující množiny lineárně nezávislé.

(a) $\{u, v, o\}$,

(b) $\{w, v, u\}$,

(c) $\{u, u + v, u + w\}$,

(d) $\{u - v, u - w, v - w\}$.

Cv. 8.4 Nechtě V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{T}$ a mějme dvě množiny vektorů $X \subseteq Y \subseteq V$. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

(a) Je-li X nezávislá, pak je Y závislá.

(b) Je-li X nezávislá, pak je Y nezávislá.

(c) Je-li X závislá, pak je Y závislá.

(d) Je-li Y nezávislá, pak je X nezávislá.

(e) Je-li Y závislá, pak je X závislá.

Cv. 8.5 Rozhodněte, zda vektory $(0, 1, 1, 1)^T, (1, 0, 1, 1)^T, (1, 1, 0, 1)^T, (1, 1, 1, 0)^T$ jsou lineárně závislé v $\mathbb{R}^4$ resp. v $\mathbb{Z}_3^4$.

Cv. 8.6 Buďte U, V podprostory prostoru W . Dokažte, že $U \cap V = \{o\}$ právě tehdy, když každý vektor $x \in U + V$ se dá jednoznačně zapsat jako $x = u + v$, kde $u \in U, v \in V$.

Cv. 8.7 Určete, zda následující množiny vektorů jsou lineárně nezávislé v prostoru reálných funkcí $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (nad tělesem $\mathbb{R}$).

(a) $\{2x - 1, x - 2, 3x\}$.

(b) $\{x^2 + 2x + 3, x + 1, x - 1\}$.

(c) $\{\sin x, \cos x\}$.

Cv. 8.8 Najděte čtyři lineárně závislé vektory z $\mathbb{R}^4$ tak, aby:

(a) právě jeden vektor byl lineárně závislý na ostatních,

(b) právě dva vektory byly lineárně závislé na ostatních třech,

(c) právě tři vektory byly lineárně závislé na ostatních třech,

(d) každý z nich byl lineárně závislý na ostatních třech,