

11. Lineární zobrazení, matice vzhledem ke kanonické bázi

Definice lineárního zobrazení

Cv. 11.1 Rozhodněte, zda následující zobrazení $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ jsou lineární:

- (a) $f(x, y) = (x, y + 3)^T$,
- (b) $f(x, y) = (x + 2y, y)^T$,
- (c) $f(x, y) = (0, 0)^T$,
- (d) $f(x, y) = (x^2, y)^T$.

Řešení:

- (a) Zobrazení $f(x, y) = (x, y + 3)^T$ není lineární, protože nulový vektor nezobrazuje na nulový vektor.
- (b) Zobrazení $f(x, y) = (x + 2y, y)^T$ je lineární. Ověříme obě podmínky z definice.

Součet. Uvažujme dva vektory (x, y) a (x', y') . Jejich součet se zobrazí na vektor

$$\begin{aligned} f((x, y) + (x', y')) &= f(x + x', y + y') = ((x + x') + 2(y + y'), (y + y'))^T = \\ &= (x + 2y, y)^T + (x' + 2y', y')^T = f(x, y) + f(x', y'). \end{aligned}$$

Násobek. Uvažujme vektor (x, y) a skalár α . Pak vektor $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$ se zobrazí na vektor

$$f(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x + 2(\alpha y), \alpha y)^T = \alpha(x + 2y, y)^T = \alpha f(x, y).$$

- (c) Zobrazení $f(x, y) = (0, 0)^T$ je lineární. Vlastnosti z definice lineárního zobrazení se snadno ověří.
- (d) Zobrazení $f(x, y) = (x^2, y)^T$ není lineární. Například pro vektor $(x, y) = (1, 0)$ a skalár $\alpha = 2$ dostáváme

$$f(\alpha(x, y)) = f(\alpha x, \alpha y) = f(2, 0) = (4, 0)^T,$$

ale

$$\alpha f(x, y) = 2f(1, 0) = 2(1, 0)^T = (2, 0)^T.$$

Čili obecně $f(\alpha(x, y)) \neq \alpha f(x, y)$.

Cv. 11.2 Rozhodněte, zda následující zobrazení z prostoru $\mathbb{R}^{n \times n}$ jsou lineární:

- (a) $f(A) = A^T$,
- (b) $f(A) = I_n$,
- (c) $f(A) = A^2$,
- (d) $f(A) = a_{11}$,

(e) $f(A) = \text{RREF}(A)$,

Řešení:

- (a) Zobrazení $f(A) = A^T$ je lineární, což plyne z vlastností maticové transpozice:

$$(A + B)^T = A^T + B^T, \quad (\alpha A)^T = \alpha A^T.$$

- (b) Zobrazení $f(A) = I_n$ není lineární, protože nezobrazuje nulovou matici na nulovou.

- (c) Zobrazení $f(A) = A^2$ není lineární. Například pro $A = I_n$ a $\alpha = 3$ máme

$$f(\alpha A) = 9I_n \neq 3I_n = \alpha f(A).$$

- (d) Zobrazení $f(A) = a_{11}$ je lineární. Podmínky z definice se snadno ověří.

- (e) Zobrazení $f(A) = \text{RREF}(A)$ není lineární. Například pro $A = B = I_n$ máme

$$f(A + B) = I_n \neq I_n + I_n = f(A) + f(B).$$

Matice lineárního zobrazení vzhledem ke kanonické bázi

Cv. 11.3 Pro lineární zobrazení $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dané předpisem $f(x, y) = (x + y, x - y)^T$ vypočítejte matici lineárního zobrazení vůči kanonické bázi.

Řešení:

Navrhujeme dva způsoby výpočtu matice zobrazení:

- (a) Vyjdeme z definice, že lineární zobrazení je popsáno obrazem báze. V našem případě potřebujeme vypočítat obraz kanonické báze, čili

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1, 0) = (1, 1)^T, \\ f(e_2) &= f(0, 1) = (1, -1)^T. \end{aligned}$$

Tyto vektory tvoří sloupce hledané matice

$${}_{\text{kan}}[f]_{\text{kan}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Vyjdeme z předpisu $f(x, y) = (x + y, x - y)^T$, který chceme vyjádřit jako $f(x, y) = A(x, y)^T$ pro určitou matici $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Tedy

$$\begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}.$$

Není těžké nahlédnout porovnáním koeficientů u x, y , že rovnost splňuje matice

$${}_{\text{kan}}[f]_{\text{kan}} = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cv. 11.4 Najděte obraz vektoru $v = (-1, 1, 2)^T$ při lineárním zobrazení $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definovaném:

$$f(1, 0, 0) = (1, 1)^T, \quad f(0, 1, 0) = (-1, 2)^T, \quad f(0, 0, 1) = (0, 0)^T.$$

Řešení:

Předvedeme dva možné způsoby, jak postupovat.

- (a) První způsob využívá matici zobrazení. Sestavíme proto nejprve matici zobrazení vzhledem ke kanonické bázi. Protože máme zadány obrazy kanonické bázi, stačí tyto obrazy poskládat do sloupců matice. Tedy

$${}_{\text{kan}}[f]_{\text{kan}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hledaný obraz pak dostaneme vynásobením s maticí zobrazení:

$$f(v) = {}_{\text{kan}}[f]_{\text{kan}} \cdot [v]_{\text{kan}} = {}_{\text{kan}}[f]_{\text{kan}} \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Druhý způsob vychází přímo z definice lineárního zobrazení. Protože

$$v = (-1, 1, 2)^T = -1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 2 \cdot e_3,$$

platí

$$\begin{aligned} f(v) &= f(-1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 2 \cdot e_3) = -1 \cdot f(e_1) + 1 \cdot f(e_2) + 2 \cdot f(e_3) = \\ &= -1(1, 1)^T + 1(-1, 2)^T + 2(0, 0)^T = (-2, 1)^T. \end{aligned}$$

Cv. 11.5 Najděte matici následujících lineárních zobrazení v rovině $\mathbb{R}^2$ vzhledem ke kanonické bázi:

- Otočení o 90° proti směru hodinových ručiček.
- Projekce na osu x .
- Otočení o 90° proti směru hodinových ručiček a pak projekce na osu x .
- Projekce na osu x a pak otočení o 90° proti směru hodinových ručiček.

Řešení:

Stačí zobrazit jednotkové vektory $e_1 = (1, 0)^T$, $e_2 = (0, 1)^T$ a jejich obrazy tvoří sloupce hledané matice.

- (a) Vektor $(1, 0)^T$ se otočí na $(0, 1)^T$ a vektor $(0, 1)^T$ se otočí na $(-1, 0)^T$. Matice zobrazení tedy je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (b) Vektor $(1, 0)^T$ se projektuje na $(1, 0)^T$ a vektor $(0, 1)^T$ se projektuje na $(0, 0)^T$. Matice zobrazení tedy je

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (c) Vektor $(1, 0)^T$ se otočí na $(0, 1)^T$, který se pak projektuje na $(0, 0)^T$. Vektor $(0, 1)^T$ se otočí na $(-1, 0)^T$ a následně projektuje na $(-1, 0)^T$. Matice zobrazení tedy je

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alternativně dostaneme matici zobrazení složením předchozích dvou zobrazení. Matice je pak rovna součinu příslušných dvou matic, tedy

$$C = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (d) Vektor $(1, 0)^T$ se projektuje na $(1, 0)^T$, který se pak otočí na $(0, 1)^T$. Vektor $(0, 1)^T$ se projektuje na $(0, 0)^T$ a následně otočí na $(0, 0)^T$. Matice zobrazení tedy je

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alternativně dostaneme matici zobrazení složením předchozích dvou zobrazení. Matice je pak rovna součinu příslušných dvou matic, tedy

$$D = AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tento příklad opět ilustruje, že skládání zobrazení není komutativní operace, stejně jako a součin matic.

12. Matice přechodu a matice lineárního zobrazení

Matice přechodu

Cv. 12.1 V prostoru $\mathbb{R}^3$ uvažujme dvě báze

$$B_1 = \{(1, 1, 1)^T, (0, 1, -1)^T, (2, 0, 1)^T\}, \quad B_2 = \{(3, 2, 2)^T, (1, 0, 1)^T, (1, 2, 2)^T\}.$$

- Sestrojte matici přechodu od báze B_1 do kanonické.
- Sestrojte matici přechodu od kanonické báze do báze B_1 .
- Určete souřadnice vektoru $(1, 2, 0)^T$ vzhledem k bázi B_1 .
- Sestrojte matici přechodu od báze B_2 do báze B_1 .

Řešení:

Obecně má matice přechodu od báze $B_1 = \{b_1, \dots, b_n\}$ do báze $B_2 = \{c_1, \dots, c_n\}$ předpis

$${}_{B_2}[id]_{B_1} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} | & | & | & | \\ [b_1]_{B_2} & [b_2]_{B_2} & \dots & [b_n]_{B_2} \\ | & | & | & | \end{array} \right).$$

- Chceme matici přechodu ${}_{\text{kan}}[id]_{B_1}$. Podle předpisu výše tedy musíme zkonstruovat matici

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} | & | & | & | \\ [b_1]_{\text{kan}} & [b_2]_{\text{kan}} & \dots & [b_n]_{\text{kan}} \\ | & | & | & | \end{array} \right).$$

Stačí tedy pouze vzít bázecké vektory B_1 a dát je do sloupečků matice,

$${}_{\text{kan}}[id]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Chceme matici přechodu ${}_{B_1}[id]_{\text{kan}}$. Úlohu můžeme vyřešit dvěma způsoby. První možností je postupovat podle předpisu výše, tedy zkonstruovat matici

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} | & | & | & | \\ [e_1]_{B_1} & [e_2]_{B_1} & \dots & [e_n]_{B_1} \\ | & | & | & | \end{array} \right).$$

To odpovídá hledání koeficientů vektorů e_i při bázi B_1 , tedy problému, který umíme převést na hledání řešení soustavy lineárních rovnic pro tři vektory pravých stran zároveň, konkrétně

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Jednotlivými řešeními této soustavy jsou vektory $\frac{1}{3}(-1, 1, 2)^T$, $\frac{1}{3}(2, 1, -1)^T$ a $\frac{1}{3}(2, -2, -1)^T$. Dostáváme tedy matici

$${}_{B_1}[id]_{\text{kan}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Druhý způsob by bylo využít vztahu $({}_{B_1}[id]_{B_2})^{-1} = {}_{B_2}[id]_{B_1}$. Všimněme si ovšem, že výpočet inverze vede v našem případě na řešení stejné soustavy rovnic, jako při prvním způsobu výpočtu.

- (c) Opět můžeme problém řešit dvěma způsoby. První by byl přímo z definice hledat koeficienty zadaného vektoru vůči bázi, který vede na řešení soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

V našem případě bude jednodušší využít vztahu $[x]_{B_1} = {}_{B_1}[id]_{\text{kan}} \cdot [x]_{\text{kan}} = {}_{B_1}[id]_{\text{kan}} \cdot x$, tedy

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (d) Chceme matici ${}_{B_1}[id]_{B_2}$. Ukážeme dva postupy.

První způsob je z definice matice zobrazení. Z předpisu výše musíme zkonstruovat matici

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} | & | & | & | \\ [c_1]_{B_1} & [c_2]_{B_1} & \dots & [c_n]_{B_1} \\ | & | & | & | \end{array} \right).$$

Podobně jako v podúloze (b) vede tento problém na hledání řešení soustavy lineárních rovnic pro tři vektory pravých stran zároveň, konkrétně

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right).$$

Jednotlivými řešeními jsou vektory $\frac{1}{3}(5, 1, 2)^T$, $\frac{1}{3}(1, -1, 1)^T$ a $\frac{1}{3}(7, -1, -2)^T$. Dostáváme tedy matici

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Druhý způsob využívá toho, že už známe konkrétní hodnoty matice ${}_{B_1}[id]_{\text{kan}}$. Můžeme pak snadno spočítat

$$\begin{aligned} {}_{B_1}[id]_{B_2} &= {}_{B_1}[id]_{\text{kan}} \cdot {}_{\text{kan}}[id]_{B_2} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Cv. 12.2 Najděte matici přechodu od báze b_1, b_2, b_3, b_4 k bázi b_2, b_4, b_1, b_3 .

Řešení:

Matici přechodu bychom mohli nalézt stejným způsobem, jako v předchozí úloze. Alternativně nám stačí si uvědomit, že jediné, co se na bázi mění je pořadí vektorů, tedy v důsledku toho i pořadí souřadnic vektorů. Zatímco tedy původně byly souřadnice vektorů b_1, b_2, b_3, b_4 vůči první bázi vektory

$$(1, 0, 0, 0)^T, (0, 1, 0, 0)^T, (0, 0, 1, 0)^T, (0, 0, 0, 1)^T,$$

vůči druhé bázi dostáváme vektory

$$(0, 0, 1, 0)^T, (1, 0, 0, 0)^T, (0, 0, 0, 1)^T, (0, 1, 0, 0)^T.$$

Matice přechodu bude mít proto předpis

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cv. 12.3 Určete matici přechodu od báze B_1 do báze B_2 prostoru $\mathcal{P}^2$, je-li

$$B_1 = \{x^2 + 1, x^2 - 3x + 1, x^2 + x + 3\}, \quad B_2 = \{x^2 + 2x + 1, 2x^2 + 1, x^2 - x\}.$$

Řešení:

Postup je úplně stejný jako v předchozích úlohách. Hledáme souřadnice bázeckých vektorů B_1 vůči bázi B_2 . Pro vektor $x^2 + 1$ řešíme

$$x^2 + 1 = \alpha_1(x^2 + 2x + 1) + \alpha_2(2x^2 + 1) + \alpha_3(x^2 - x).$$

Dva polynomy se rovnají, pokud se rovnají koeficienty u jednotlivých mocnin x , rovnice je tedy ekvivalentní soustavě

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 1, \\ 2\alpha_1 - \alpha_3 &= 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 1. \end{aligned}$$

Ta má řešení $(-1, 2, -2)^T$. Obdobně lze spočítat souřadnice $[x^2 - 3x + 1]_{B_2} = (-4, 5, -5)^T$ a $[x^2 + x + 3]_{B_2} = (-4, 7, -9)^T$. Dostáváme matici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -4 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -5 & -9 \end{pmatrix}.$$

Všechna tři řešení můžeme opět spočítat naráz pomocí jedné soustavy se třemi pravými stranami. Pokud tedy rozšířenou matici

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

převeďme na RREF tvar $(I_3 \mid A)$, potom v pravé části vyčteme hledanou matici A .

Matice obecného lineárního zobrazení

Cv. 12.4 Uvažujme lineární zobrazení $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadané obrazy kanonické báze:

$$f(e_1) = (1, -1, 1)^T, \quad f(e_2) = (0, 1, 1)^T.$$

Uvažujme dvě báze

$$B_1 = \{(1, -1)^T, (1, 1)^T\}, \quad B_2 = \{(1, -1, 1)^T, (1, 0, 1)^T, (0, 1, 1)^T\}.$$

Spočítejte:

- (a) matici zobrazení vzhledem ke kanonickým bázím, tj. ${}_{\text{kan}}[f]_{\text{kan}}$.
- (b) matici zobrazení od B_1 ke kanonické bázi, tj. ${}_{\text{kan}}[f]_{B_1}$.
- (c) matici zobrazení od kanonické báze k B_2 , tj. ${}_{B_2}[f]_{\text{kan}}$.
- (d) matici zobrazení od B_1 k B_2 , tj. ${}_{B_2}[f]_{B_1}$.

Řešení:

Obecně má maticová reprezentace zobrazení $f: U \rightarrow V$ od báze $B_U = \{u_1, \dots, u_n\}$ do báze $B_V = \{v_1, \dots, v_m\}$ předpis

$${}_{B_V}[f]_{B_U} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} | & | & | & | \\ [f(u_1)]_{B_V} & [f(u_2)]_{B_V} & \dots & [f(u_n)]_{B_V} \\ | & | & | & | \end{array} \right).$$

- (a) Chceme matici ${}_{\text{kan}}[f]_{\text{kan}}$, podle předpisu výše tedy musíme zkonstruovat

$$\left(\begin{array}{c|c} | & | \\ [f(e_1)]_{\text{kan}} & [f(e_2)]_{\text{kan}} \\ | & | \end{array} \right).$$

Sloupce $[f(e_i)]_{\text{kan}} = f(e_i)$ dostáváme přímo ze zadání. Výsledná matice má proto tvar

$${}_{\text{kan}}[f]_{\text{kan}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Chceme matici ${}_{\text{kan}}[f]_{B_1}$, podle předpisu výše tedy musíme zkonstruovat

$$\left(\begin{array}{c|c} \left[f \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_{\text{kan}} & \left[f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{\text{kan}} \end{array} \right).$$

Z vlastností lineárního zobrazení dostáváme

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} &= f(e_1) - f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= f(e_1) + f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Výsledná matice má tedy tvar

$${}_{\text{kan}}[f]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alternativně můžeme hledanou matici dostat rozdělením na jednodušší části s využitím matice složeného zobrazení:

$${}_{\text{kan}}[f]_{B_1} = {}_{\text{kan}}[f]_{\text{kan}} \cdot {}_{\text{kan}}[id]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Chceme matici ${}_{B_2}[f]_{\text{kan}}$, podle předpisu výše tedy musíme zkonstruovat

$$\left(\begin{array}{c|c} | & | \\ [f(e_1)]_{B_2} & [f(e_2)]_{B_2} \\ | & | \end{array} \right).$$

Souřadnice $[(1, -1, 1)^T]_{B_2}$, $[(0, 1, 1)^T]_{B_2}$ můžeme získat jako řešení soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

V tomto případě si také stačí uvědomit, že $f(e_1)$ odpovídá prvnímu bázi-ckému vektoru B_2 a $f(e_2)$ odpovídá třetímu bázi-ckému vektoru B_2 , jejich souřadnice budou proto $(1, 0, 0)^T$, resp. $(0, 0, 1)^T$. Výsledná matice má proto tvar

$${}_{B_2}[f]_{\text{kan}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Opět je užitečné ukázat i alternativní způsob pomocí skládání jednodušších zobrazení:

$${}_{B_2}[f]_{\text{kan}} = {}_{B_2}[id]_{\text{kan}} \cdot {}_{\text{kan}}[f]_{\text{kan}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zde ale musíme invertovat matici ${}_{B_2}[id]_{\text{kan}} = ({}_{\text{kan}}[id]_{B_2})^{-1}$, takže pokud inverzi nemáme předem spočítanou, tak tento postup efektivnější nebude.

(d) Chceme matici ${}_{B_2}[f]_{B_1}$, podle předpisu výše tedy musíme zkonstruovat

$$\left(\left[f \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_{B_2} \left[f \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_{B_2} \right).$$

Z podúlohy (b) již známe obrazy $f(1, -1)^T = (1, -2, 0)^T$, $f(1, 1)^T = (1, 0, 2)^T$. Ty tedy stačí vyjádřit v souřadnicích báze B_2 . Souřadnice nalezeneme jako řešení soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right).$$

Jednotlivá řešení jsou vektory $(1, 0, -1)^T$, $(1, 0, 1)^T$, výsledná matice má proto tvar

$${}_{B_2}[f]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

S využitím předchozích bodů hledanou matici můžeme také spočítat takto:

$${}_{B_2}[f]_{B_1} = {}_{B_2}[f]_{\text{kan}} \cdot {}_{\text{kan}}[id]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cv. 12.5 Uvažujme dvě lineární zobrazení $f, g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadaná maticemi

$${}_B[f]_{\text{kan}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad {}_B[g]_{\text{kan}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

kde $B = \{(1, 0, -1)^T, (1, 1, 0)^T, (1, -2, 1)^T\}$. Určete ${}_{\text{kan}}[g \circ f]_{\text{kan}}$.

Řešení:

K řešení můžeme využít vztahu ${}_{B_3}[g \circ f]_{B_1} = {}_{B_3}[g]_{B_2} \cdot {}_{B_2}[f]_{B_1}$, v našem případě ve tvaru

$${}_{\text{kan}}[g \circ f]_{\text{kan}} = {}_{\text{kan}}[g]_B \cdot {}_B[f]_{\text{kan}}.$$

Matici ${}_{\text{kan}}[g]_B$ můžeme nejsnadněji zkonstruovat pomocí matic přechodu jako

$${}_{\text{kan}}[g]_B = {}_{\text{kan}}[id]_B \cdot {}_B[g]_{\text{kan}} \cdot {}_{\text{kan}}[id]_B.$$

Dostáváme tedy

$${}_{\text{kan}}[g]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 0 \\ 4 & -1 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Výsledná matice proto je

$${}_{\text{kan}}[g \circ f]_{\text{kan}} = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 0 \\ 4 & -1 & -7 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Cv. 12.6 Mějme lineární zobrazení $f: U \rightarrow V$ dané maticovým předpisem $A = {}_{B_V}[f]_{B_U}$. Ukažte, že matice $\text{RREF}(A)$ reprezentuje stejné zobrazení, ale vzhledem k jiným bázím.

Řešení:

Vztah mezi A a $\text{RREF}(A)$ lze vyjádřit jako

$$\text{RREF}(A) = E \cdot A = E_k \dots E_1 \cdot A,$$

kde matice E_i reprezentují jednotlivé elementární řádkové úpravy. Pro nás je klíčové, že tyto matice jsou regulární a každou regulární matici můžeme chápat jako matici přechodu

$$E_i = {}_{B'_i}[id]_{B_i}$$

mezi určitými bázemi. Podobně můžeme vyjádřit souhrnně matici E

$$E = {}_{B'_V}[id]_{B_V}$$

pro vhodnou bázi B'_V prostoru V . Proč? Protože

$${}_{B'_V}[id]_{B_V} = {}_{B'_V}[id]_{\text{kan}} \cdot {}_{\text{kan}}[id]_{B_V} = ({}_{\text{kan}}[id]_{B'_V})^{-1} \cdot {}_{\text{kan}}[id]_{B_V},$$

dostáváme

$${}_{\text{kan}}[id]_{B'_V} = {}_{\text{kan}}[id]_{B_V} \cdot E^{-1},$$

a tudíž bázi B'_V (přesně řečeno její souřadnice vzhledem ke kanonické bázi) vyčteme ze sloupců matice ${}_{\text{kan}}[id]_{B_V} \cdot E^{-1}$.

Odstupňovaný tvar matice A tedy můžeme chápat jako

$$\text{RREF}(A) = E \cdot A = {}_{B'_V}[id]_{B_V} \cdot {}_{B_V}[f]_{B_U} = {}_{B'_V}[f]_{B_U},$$

tedy maticovou reprezentaci stejného zobrazení, která se liší pouze ve výstupní bázi.

Cv. 12.7 Známe matici ${}_B[f]_B$ lineárního zobrazení $f: U \rightarrow U$. Jak můžeme určit matici ${}_{B'}[f]_{B'}$ vůči bázi B' ?

Řešení:

Máme dvě možnosti, jak dojít k řešení:

- (a) Matici můžeme sestavit přímo z definice analogicky postupu sestavení matice ${}_B[f]_B$.
- (b) Můžeme využít již spočítaných výsledků a skládání lineárních zobrazení:
 ${}_{B'}[f]_{B'} = {}_{B'}[id]_B \cdot {}_B[f]_B \cdot {}_B[id]_{B'}$.
 Intuitivně: zobrazovaný vektor vůči bázi B' se zobrazí maticí přechodu ${}_B[id]_{B'}$ vůči bázi B , následně se transformuje maticí ${}_B[f]_B$ a vyjádří se zpět maticí přechodu ${}_{B'}[id]_B$ vůči bázi B' .

Cv. 12.8 Mějme matici M lineárního zobrazení. Diskutujte, kolik lineárních zobrazení popisuje matice M ?

Řešení:

Jedná se o lehce zavádějící otázku. Odpověď záleží na podmínce, jestli máme definované báze vůči nimž zobrazení definujeme. V případě, že ano, pak matice M reprezentuje jen jedno lineární zobrazení a toto lineární zobrazení je reprezentováno právě jednou maticí, jedná se o důsledek věty o jednoznačnosti matice lineárního zobrazení. Pokud však není uvedeno, vůči jaké bázi se zobrazení vyjadřuje pak ke každé bázi existuje jedno lineární zobrazení a je jich tedy nekonečně mnoho.

13. Vlastnosti a druhy lineárních zobrazení

Obraz a jádro

Cv. 13.1 Pro lineární zobrazení $f: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ dané předpisem $A \mapsto (A - A^T)$ rozhodněte, které vektory patří do jádra a které do obrazu:

- (a) I_2 ,
- (b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
- (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,
- (d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Řešení:

Matice A patří do jádra f , pokud $f(A) = 0_{2 \times 2}$. Naopak matice A patří do obrazu zobrazení f , pokud existuje matice B taková, že $f(B) = A$.

- (a) Patří do jádra, neboť $I_2 - I_2^T = 0_{2 \times 2}$. Naopak nepatří do obrazu, protože by musela existovat B , že

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

To ale není možné, protože pro prvek na pozici $(1, 1)$ by musel být splněn vztah

$$0 = b_{11} - b_{11} = 1.$$

- (b) Patří do jádra i do obrazu (je obrazem sama sebe).
- (c) Patří do jádra, neboť

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Naopak nepatří do obrazu, protože na diagonále jsou nenulové prvky.

- (d) Nepatří do jádra, neboť

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aby matice patřila do obrazu, musela by existovat B taková, že

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rozepsáním po složkách dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} b_{11} - b_{11} &= 0, \\ b_{12} - b_{21} &= 1, \\ b_{21} - b_{12} &= -1, \\ b_{22} - b_{22} &= 0. \end{aligned}$$

První a poslední rovnice odpovídají $0 = 0$ a zbylé dvě rovnice jsou ekvivalentní. Soustava se tedy zjednoduší na jedinou rovnici

$$b_{12} - b_{21} = 1.$$

Hledaných matic je tedy nekonečně mnoho a jsou tvaru

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} + 1 \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad b_{11}, b_{21}, b_{22} \in \mathbb{R}.$$

Příkladem jedné konkrétní matice B může být

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Závěr: Daná matice patří do obrazu.

Cv. 13.2 Uvažujme lineární zobrazení $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Označme lineární zobrazení $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, $f^n = f \circ f^{n-1}$. Ukažte, že $\text{Ker}(f^{(n-1)}) \subseteq \text{Ker}(f^n)$.

Řešení:

Pokud $v \in \text{Ker}(f^{n-1})$, pak ze vztahu $f^{n-1}(v) = o$ platí

$$f^n(v) = f(f^{n-1}(v)) = f(o) = o.$$

Proto také $v \in \text{Ker}(f^n)$.

Cv. 13.3 Buď $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineární zobrazení zadané

$$f(1, 0, 1) = (0, 1)^T, \quad f(0, 1, 1) = (-1, 0)^T, \quad f(1, 1, 0) = (1, 0)^T.$$

- (a) Určete $\dim f(\mathbb{R}^3)$ a $\dim \text{Ker}(f)$.
- (b) Najděte bázi $f(\mathbb{R}^3)$ a $\text{Ker}(f)$.

Řešení:

- (a) Pro jednodušší manipulaci si vyjádříme zobrazení pomocí maticové reprezentace ${}_{\text{kan}}[f]_B$, kde $B = \{(1, 0, 1)^T, (0, 1, 1)^T, (1, 1, 0)^T\}$. Dostáváme

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Uvedená matice má dimenzi řádkového (a tedy i sloupcového) prostoru rovnou 2 a dimenzi jádra rovnou 1. Tyto dimenze odpovídají $\dim f(\mathbb{R}^3)$ a $\dim \text{Ker}(f)$.

- (b) V předchozí úloze jsme ukázali, že $\dim f(\mathbb{R}^3) = 2$. Protože $f(\mathbb{R}^3) \subseteq \mathbb{R}^2$, dostáváme dokonce $f(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^2$. Libovolná báze prostoru $\mathbb{R}^2$ je proto bází obrazu $f(\mathbb{R}^3)$. Obecně bázi obrazu můžeme zkonstruovat z obrazů báze původního prostoru, tedy vektorů $(0, 1)^T, (-1, 0)^T, (1, 0)^T$. V tomto případě je druhý vektor závislý na třetím, jeho odstraněním dostáváme bázi prostoru $\mathbb{R}^2$.

Pro určení báze jádra můžeme využít maticové reprezentace a nalézt řešení soustavy

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = 0.$$

Množina řešení má tvar $\{(0, x_3, x_3)^T; x_3 \in \mathbb{R}\}$. Pozor, tato množina odpovídá množině *souřadnic* bází vzhledem k bázi B , protože

$$o = [f(x)]_{\text{kan}} = {}_{\text{kan}}[f]_B \cdot [x]_B.$$

Zvolíme-li z jádra matice například vektor $[x]_B = (0, 1, 1)^T$, odpovídající vektor $x \in \text{Ker}(f)$ dopočítáme jako

$$x = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Cv. 13.4 Co je obrazem prostoru $\text{span}\{\sin x, \cos x\}$ při zobrazení s maticí $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ vzhledem k bázím $\{\cos x - \sin x, \sin x\}$ a $\{\cos x + \sin x, \cos x\}$?

Řešení:

Z definice konstrukce maticové reprezentace lineárního zobrazení vůči daným bázím lze z maticové reprezentace vyčíst předpis dané funkce

$$\begin{aligned} f(\cos x - \sin x) &= 0 \cdot (\cos x + \sin x) + 1 \cdot \cos x = \cos x, \\ f(\sin x) &= 0 \cdot (\cos x + \sin x) + 0 \cdot \cos x = 0. \end{aligned}$$

Dostáváme tedy, že obraz bude

$$\text{span}\{\cos x, 0\} = \text{span}\{\cos x\}.$$

Jádro pak má tvar $\text{span}\{\sin x\}$.

Cv. 13.5 Buď $f: U \rightarrow V$ lineární zobrazení a W podprostor $f(U)$. Dokažte, že tzv. úplný vzor

$$f^{-1}(W) = \{x \in U; f(x) \in W\}$$

je podprostor prostoru U .

Řešení:

Stačí ukázat, že $o \in f^{-1}(W)$ a že je tato množina uzavřená na operace. Protože je W vektorový podprostor, obsahuje o . Z vlastností lineárního zobrazení je jedním z vektorů x splňujících $f(x) = o$ i nulový vektor o . Tedy $o \in f^{-1}(W)$.

Mějme dále $x, y \in f^{-1}(W)$. Z definice $f^{-1}(W)$ existují $a, b \in W$ takové, že $f(x) = a$ a $f(y) = b$. Protože W je vektorový podprostor, také $a + b \in W$. Úpravami dostáváme

$$a + b = f(x) + f(y) = f(x + y).$$

Dle definice vektor $x + y \in f^{-1}(W)$, množina je proto uzavřená na sčítání.

Obdobně mějme $x \in f^{-1}(W)$ a skalár α . Platí, že existuje $y \in W$, že $f(x) = y$ a také platí $\alpha y \in W$. Pomocí úprav

$$\alpha y = \alpha f(x) = f(\alpha x)$$

a definice $f^{-1}(W)$ vektor $\alpha x \in f^{-1}(W)$, množina je proto uzavřená na násobení.

Zobrazení prosté a „na“

Cv. 13.6 Najděte příklady lineárních zobrazení (vyjádřených například maticově $f(x) = Ax$) takových, aby zobrazení

- (a) bylo prosté a „na“,
- (b) bylo prosté, ale nebylo „na“,
- (c) nebylo prosté, ale bylo „na“,
- (d) nebylo ani prosté, ani „na“.

Řešení:

Toto je kreativní příklad. Detailnější podmínky na matici A , aby příslušné lineární zobrazení bylo / nebylo prosté či „na“ rozebereme později ve Cv. 13.8.

- (a) Například $A = I_2$. Zobrazení je tudíž identita a zřejmě je prosté i „na“.
- (b) Například $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Zobrazení není „na“, protože sloupce matice A vygenerují pouze dvoudimenzionální podprostor v prostoru $\mathbb{R}^3$. Na druhou stranu, zobrazení je prosté, protože vztah $Ax = Ay$ vede na rovnici $A(x - y) = 0$, která má pouze triviální řešení $x = y$.
- (c) Například $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Zobrazení pak není prosté, protože $A(1, 1, 1)^T = (2, 2)^T = A(0, 0, 2)^T$. Zobrazení je ale „na“, protože ve sloupcích matice A je kanonická báze prostoru $\mathbb{R}^2$, tudíž vygenerujeme jakýkoli vektor v $\mathbb{R}^2$.
- (d) Například $A = 0$.

Cv. 13.7 Mějme lineární zobrazení $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadané obrazem báze B :

$$\begin{aligned} f(2, 1, 1) &= (1, 2, 3)^T, \\ f(1, 3, 5) &= (3, 2, 1)^T, \\ f(7, 1, 4) &= (1, 1, 1)^T. \end{aligned}$$

Zjistěte, jestli je zobrazení prosté (pokud není, najděte vektory $u, v \in \mathbb{R}^3$ takové, že $u \neq v \wedge f(u) = f(v)$) a jestli je „na“ (pokud ne, najděte vektor, který nemá

předobraz, tedy $u \in \mathbb{R}^3$ takové že $\forall v \in \mathbb{R}^3: f(v) \neq u$. Určete dimenzi a bázi obrazu a jádra tohoto lineárního zobrazení.

Řešení:

Prostota: Napřed určíme, jestli je zobrazení prosté (injektivní). Pokud by nebylo, pak by nutně existovaly dva různé vektory $u, v \in \mathbb{R}^3$ (z definičního oboru) takové, že $f(u) = f(v)$. Upravme si tuto situaci:

$$\begin{aligned} f(u) &= f(v), \\ {}_A[f]_B \cdot [u]_B &= {}_A[f]_B \cdot [v]_B, \\ {}_A[f]_B \cdot [u]_B - {}_A[f]_B \cdot [v]_B &= o, \\ {}_A[f]_B \cdot ([u]_B - [v]_B) &= o, \end{aligned}$$

kde ${}_A[f]_B$ značí matici lineárního zobrazení a $[u]_B, [v]_B$ značí vektory souřadnic vektorů u, v vůči bázi B , tedy $[f(u)]_A = {}_A[f]_B \cdot [u]_B$. V našem případě je báze A kanonická báze. Tedy pokud je zobrazení prosté, pak jeho matice má ve svém jádře jediný vektor o .

Sestrojíme tedy matici (bude brát vektory souřadnic v bázi B a vracet vektory souřadnic v kanonické bázi):

$${}_{\text{kan}}[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pomocí Gaussovy eliminace najdeme její jádro:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & -8 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že jádro má dimenzi jedna a všechna řešení této homogenní soustavy mají tvar: $\{(-\frac{1}{4}t, -\frac{1}{4}t, t)^T; t \in \mathbb{R}\}$. Můžeme volit vektor $[u]_B = (1, 1, -4)^T$, tedy

$$u = 1 \cdot (2, 1, 1)^T + 1 \cdot (1, 3, 5)^T - 4 \cdot (7, 1, 4)^T = (-25, 0, -10)^T,$$

který se zobrazí na nulu (stejně jako nulový vektor)

$$f(0, 0, 0) = (0, 0, 0)^T = f(-25, 0, -10).$$

Všimněte si, že souřadnice vektoru z jádra matice byly vůči bázi B , my chtěli souřadnice vektoru u v kanonické bázi, museli jsme tedy ještě řešit převod mezi souřadnicemi.

Dimenze jádra: Vzhledem k tomu, že jádro lineárního zobrazení má dimenzi jedna, tak jeho bázi může tvořit například vektor $u = (-25, 0, -10)^T$ (vzpomeňte, jak jsme na něj přišli – platí, že $[(-25, 0, -10)^T]_B = (1, 1, -4)$).

Obraz a surjektivita (jestli je „na“): Každý vektor z obrazu je lineární kombinací sloupcových vektorů. Speciálně existuje vektor $a \in \mathbb{R}^3$ takový, že $f(a) = (1, 2, 3)^T$ (psáno v kanonické bázi), to byl náš zadaný vektor $(2, 1, 1)^T$, který měl v bázi B souřadnice $[(2, 1, 1)^T]_B = (1, 0, 0)^T$.

Z minulé Gaussovy eliminace vidíme, že dimenze obrazu (což je dimenze sloupového prostoru, což dle věty z přednášky je rovné dimenzi řádkového prostoru) je rovná dvěma a její báze jsou například první dva sloupce matice ${}_{\text{kan}}[f]_B$, tedy vektory $(1, 2, 3)^T$, $(3, 2, 1)^T$ (obraz je pak lineární obal těchto dvou vektorů). Dimenze obrazu je tedy dva a zobrazení f není „na“.

Vektor mimo obraz: Doplněním těchto dvou vektorů na bázi $\mathbb{R}^3$ získáme vektor, který nemá předobraz ve zobrazení f . Například to může být vektor $(0, 0, 1)^T$ (pokud bychom nedoplňovali z kanonické báze, ale z jiné, mohl nám vyjít jiný vektor).

Cv. 13.8 Jak poznáme ze zadané matice $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ lineárního zobrazení $f: U \rightarrow V$, že zobrazení f je prosté, resp. „na“?

Řešení:

Lineární zobrazení je prosté právě tehdy, když $\text{Ker}(f) = \{o\}$. Z toho plyne, že je zobrazení prosté právě tehdy, když

$$\text{Ker}(A) = \{o\}.$$

Jinými slovy, musí $0 = \dim \text{Ker}(A) = n - \text{rank}(A)$, neboli $\text{rank}(A) = n$. To znamená, že matice A má lineárně nezávislé sloupce.

Lineární zobrazení je „na“ právě tehdy, když dimenze obrazu odpovídá dimenzi prostoru V . Z toho plyne, že lineární zobrazení je „na“ právě tehdy, když

$$\text{rank}(A) = m.$$

To znamená, že matice A má lineárně nezávislé řádky.

Cv. 13.9 Rozhodněte, zda je dané lineární zobrazení prosté a zda je „na“:

- (a) $f: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + b + c, a + b, a)^T$,
- (b) $f: \mathcal{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dané předpisem $f(ax^2 + bx + c) = (a + b, 2b - c, a - b + c, a + b)^T$,
- (c) $f: \mathcal{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f(ax^2 + bx + c) = (a + b, c, a + b)^T$,
- (d) $f: \mathcal{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f(ax^2 + bx + c) = (a + b, 2b - c, a - b)^T$.

Řešení:

Ve všech případech můžeme vycházet z toho, že lineární zobrazení $f: U \rightarrow V$ je prosté právě tehdy, když

$$\text{Ker}(f) = \{o\}$$

a je „na“ právě tehdy, když

$$\dim f(U) = \dim V.$$

- (a) Zobrazení není prosté, protože

$$(a + b + c, a + b, a)^T = (0, 0, 0)^T$$

má netriviální řešení, například $a = b = c = 0$ a $d \in \mathbb{R}$.

Zobrazení je „na“, protože dimenze prostoru

$$\{(a+b+c, a+b, c)^T; a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

je 3. To lze nahlédnout například tak, že lze vygenerovat vhodnou volbou koeficientů a, b, c vektory $(1, 1, 1)^T, (1, 1, 0)^T, (1, 0, 0)^T$, které jsou lineárně nezávislé.

(b) Zobrazení není prosté, protože rovnice

$$(a+b, 2b-c, a-b+c, a+b)^T = (0, 0, 0, 0)^T$$

má množinu řešení $\{(a, -a, -2a)^T; a \in \mathbb{R}\}$.

Zobrazení není ani „na“, protože $\mathcal{P}^2$ má dimenzi 3, zatímco $\mathbb{R}^4$ má dimenzi 4. Při lineárním zobrazení se může dimenze zachovat nebo se snížit.

(c) Zobrazení není prosté, protože rovnice

$$(a+b, c, a+b)^T = (0, 0, 0)^T$$

má množinu řešení $\{(a, -a, 0)^T; a \in \mathbb{R}\}$.

Zobrazení není ani „na“, protože hodnoty v první a poslední složce jsou si vždy rovny. V obrazu tedy neleží například vektor $(1, 0, 0)^T$.

(d) Zobrazení je prosté, protože rovnice

$$(a+b, 2b-c, a-b)^T = (0, 0, 0)^T$$

má pouze triviální řešení.

Zobrazení je „na“, protože množina obrazů $\{(a+b, c, a-b)^T; a, b, c \in \mathbb{R}\}$ se dá vyjádřit jako

$$\{a(1, 0, 1)^T + b(1, 0, -1)^T + c(0, 1, 0)^T; a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Vidíme, že obrazem je lineární obal vektorů $(1, 0, 1)^T, (1, 0, -1)^T, (0, 1, 0)^T$, které jsou lineárně nezávislé. Dimenze obrazu je proto 3, stejně jako dimenze prostoru $\mathcal{P}^2$.

Isomorfismus

Cv. 13.10 Rozhodněte, zda zobrazení $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dané předpisem

$$f(x, y, z) = (x + y - 2z, y - z, x - y)^T$$

je isomorfismem $\mathbb{R}^3$ na sebe sama (takzvaným automorfismem).

Řešení:

Isomorfismus dvou vektorových prostorů je vzájemně jednoznačné lineární zobrazení (tedy lineární zobrazení, které je bijekce). Budeme chtít zjistit dimenzi jádra (pokud je zobrazení prosté, tak má být nulová) a dimenzi obrazu = dimenzi sloupcového prostoru (pokud má být zobrazení „na“, tak musí být stejná jako dimenze prostoru, do kterého to zobrazení jde).

Sestavíme matici zobrazení vůči kanonické bázi (jakákoliv báze by posloužila stejně):

$${}_{\text{kan}}[f]_{\text{kan}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abychom určili rank této matice, provedeme Gaussovu eliminaci:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že dimenze jádra matice je rovna jedné, takže zobrazení není prosté. To můžeme i snadno ověřit: $f(0, 0, 0) = (0, 0, 0)^T = f(1, 1, 1)$.

Obdobně dimenze sloupcového prostoru je rovná dvěma (vzpomeňte na větu, že dimenze sloupcového a řádkového prostoru se rovnají). Tedy funkce není „na“. Opět bychom mohli ověřit, že například vektor $(0, 0, 1)^T$ není v obraze (stejná Gaussova eliminace doplněná o pravou stranu).

Závěr: zobrazení f není isomorfismem.

Cv. 13.11 Rozhodněte, jestli jsou následující dvojice vektorových prostorů isomorfní. Pokud ano, najděte vhodný isomorfismus.

- (a) $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ a $\mathbb{R}^4$,
- (b) $\mathbb{R}^4$ a $\mathcal{P}^3$ (prostor reálných polynomů stupně nejvýš tři),
- (c) $\mathbb{R}^{m \times n}$ a $\mathbb{R}^{n \times m}$,
- (d) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}^n$ nad $\mathbb{C}$,
- (e) $\mathbb{R}^2$ a $\{x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0\}$,
- (f) $\mathbb{R}^4$ a prostor lineárních zobrazení $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$.

Řešení:

Dva vektorové prostory jsou isomorfní právě tehdy, když mají stejnou dimenzi a fungují nad stejným tělesem.

- (a) Ano, oba mají dimenzi 4. Není těžké rozmyslet, že isomorfismem je například zobrazení

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a, b, c, d)^T.$$

- (b) Ano, oba mají dimenzi 4. Reálný polynom stupně nejvýš tři

$$p(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3$$

můžeme reprezentovat jako uspořádanou čtveřici $(p_0, p_1, p_2, p_3)^T$. Isomorfismem zde je

$$(p_0, p_1, p_2, p_3)^T \mapsto p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3.$$

- (c) Ano, isomorfismem bude například transpozice

$$A \mapsto A^T.$$

- (d) Ne, prostory nepracují nad stejným tělesem.
(e) Ano, oba mají dimenzi 2. můžeme volit například zobrazení

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto (a, -a, b, -b)^T.$$

- (f) Ano, vektoru $u \in \mathbb{R}^4$ přiřadíme lineární zobrazení $f(x) = u^T x$. Naopak každé lineární zobrazení $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ se dá zapsat maticí s jedním řádkem a čtyřmi sloupci (věta z přednášky).

Cv. 13.12 Buď $f: U \rightarrow V$ isomorfismus a $x_1, \dots, x_n \in U$. Dokažte, že jsou-li $x_1, \dots, x_n$ lineárně nezávislé, pak i $f(x_1), \dots, f(x_n)$ jsou lineárně nezávislé.

Řešení:

Mějme, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ takové, že $\sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i) = o$. Dostáváme

$$o = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x)_i = f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right).$$

Pro isomorfismus platí, že $f(x) = o$ právě tehdy, když $x = o$. Proto také $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = o$. Z lineární nezávislosti $x_1, \dots, x_n$ dostáváme, že $\alpha_i = 0$ pro všechny i , tedy $f(x_1), \dots, f(x_n)$ jsou lineárně nezávislé.