

4. Regulární a inverzní matice

Cv. 4.1 Otestujte regularitu matice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení:

Regularitu matice můžeme otestovat pomocí hodnosti matice. Převeďme matici na odstupňovaný tvar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

Matice má plnou hodnost, tedy je regulární.

Cv. 4.2 Rozhodněte, kdy je trojúhelníková matice regulární.

Řešení:

Horní trojúhelníková matice je již (skoro) v odstupňovaném tvaru. Pokud jsou diagonální prvky nenulové, pak to jsou pivoty a matice je regulární. Pokud ale spoň jeden diagonální prvek je nulový, pak v příslušném sloupci není pivot, a tím pádem je matice singulární.

Pro dolní trojúhelníkovou matici je situace podobná. Matici transponujeme a převeďme tím na předchozí případ.

Cv. 4.3 Dokažte, že následující matice jsou singulární, a to tak, že najdete nenulové řešení soustavy $Ax = 0$:

(a) matice A má nulový i -tý sloupec tj. $A_{*i} = 0$;

(b) matice A má i -tý a j -tý sloupec shodný, tj. $A_{*i} = A_{*j}$ pro $i \neq j$.

Řešení:

(a) $x = e_i$;

(b) $x = e_i - e_j$.

Cv. 4.4 Najděte inverzní matici k maticím

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 10 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$

Řešení:

Ve všech třech případech využijeme algoritmu, kdy pomocí Gaussovy–Jordanovy (G-J) eliminace převedeme matici $(A \mid I_n)$ na tvar $(I_n \mid A^{-1})$.

(a) Pomocí G-J eliminace dostáváme

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array} \right) \end{aligned}$$

(b) Pomocí G-J eliminace dostáváme

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \end{aligned}$$

(c) Pomocí G-J eliminace dostáváme

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} d_1 & & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & d_n & 0 & & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & \frac{1}{d_1} & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 & & \frac{1}{d_n} \end{array} \right)$$

Jediné, co G-J eliminace provádí za operace je přeškálování řádků, protože první podmatice je již v diagonálním tvaru.

Inverzní matice existuje ale jen tehdy, když všechny hodnoty $d_1, \dots, d_n$ jsou nenulové. V opačném případě je matice singulární, a tudíž inverzi nemá.

Cv. 4.5 Invertujte matice elementárních řádkových úprav.

Řešení:

Ukážeme dva postupy.

1) První způsob je pomocí G-J eliminace převodem $(A \mid I_n)$ na $(I_n \mid A^{-1})$. Matici

$E_i(\alpha)$ invertujeme takto:

$$\begin{aligned} (E_i(\alpha) \mid I_n) &= \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \alpha & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 1/\alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{array} \right) = (I_n \mid E_i(\alpha^{-1})). \end{aligned}$$

Matici $E_{ij}(\alpha)$ invertujeme takto:

$$\begin{aligned} (E_{ij}(\alpha) \mid I_n) &= \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ & \alpha & & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots & & & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -\alpha & & \ddots & & 1 \end{array} \right) = (I_n \mid E_{ij}(-\alpha)). \end{aligned}$$

Matici E_{ij} invertujeme takto:

$$\begin{aligned} (E_{ij} \mid I_n) &= \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) = (I_n \mid E_{ij}). \end{aligned}$$

Tudíž $E_i(\alpha)^{-1} = E_i(\alpha^{-1})$, $E_{ij}(\alpha)^{-1} = E_{ij}(-\alpha)$ a $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$.

2) Druhý způsob je využitím významu matic elementárních úprav. Matice $E_i(\alpha)$ násobí i -tý řádek číslem $\alpha \neq 0$. Inverzní operace je vydělení i -tého řádku číslem α , což je reprezentováno maticí $E_i(\alpha^{-1})$. Zkouška $E_i(\alpha)E_i(\alpha^{-1}) = I$ pak skutečně ověří, že se jedná o inverzní matici.

Matice $E_{ij}(\alpha)$ přičte α -násobek j -tého řádku k i -tému. Inverzní operace je odečtení α -násobku j -tého řádku od i -tého, což je representováno maticí $E_{ij}(-\alpha)$. Zkouška opět ověří, že se jedná o inverzní matici.

Matice E_{ij} prohazuje i -tý a j -tý řádek. Inverzní operace je tatáž, výměna i -tého a j -tého řádku. Tudíž matice E_{ij} je inverzní sama k sobě.

Cv. 4.6 Upravte následující výrazy.

- (a) $(ABC)^{-1}$
- (b) $(I - B^T A^{-1})A + (A^T B)^T A^{-1}$

Řešení:

- (a) Stačí iterativně aplikovat pravidlo $(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$. Tedy:

$$(ABC)^{-1} = (A(BC))^{-1} = (BC)^{-1}A^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}.$$

- (b) S využitím základních vlastností maticového součinu, transpozice a inverze odvodíme

$$\begin{aligned} (I - B^T A^{-1})A + (A^T B)^T A^{-1} &= IA - B^T A^{-1}A + (A^T B)^T A^{-1} \quad [\text{distributivita}] \\ &= IA - B^T I + (A^T B)^T A^{-1} \quad [\text{definice inverze}] \\ &= A - B^T + (A^T B)^T A^{-1} \quad [\text{násobení maticí } I] \\ &= A - B^T + B^T A A^{-1} \quad [\text{transpozice součinu matic}] \\ &= A - B^T + B^T \quad [\text{definice inverze}] \\ &= A. \end{aligned}$$

Cv. 4.7 Dokažte, že pro $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, kde A regulární, platí

$$(ABA^{-1})^k = AB^k A^{-1}.$$

Řešení:

Postupujeme matematickou indukcí. Pro $k = 1$ tvrzení platí, protože

$$(ABA^{-1})^1 = AB^1 A^{-1}.$$

Indukční krok. Nechť tvrzení platí pro $k - 1$, tedy $(ABA^{-1})^{k-1} = AB^{k-1} A^{-1}$. Upravíme za použití indukčního předpokladu

$$\begin{aligned} (ABA^{-1})^k &= (ABA^{-1})^{k-1}(ABA^{-1}) = (AB^{k-1} A^{-1})(ABA^{-1}) \\ &= AB^{k-1}(A^{-1}A)BA^{-1} = AB^{k-1}BA^{-1} \\ &= AB^k A^{-1}. \end{aligned}$$

Cv. 4.8 Invertujte matici řádu n :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Řešení:

Podle postupu sestavíme rozšířenou matici:

$$(A \mid I_n) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 & \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Od řádků 2 až n odečteme první řádek a dostaneme

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 2 & \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right).$$

V levé části je vpravo dole je matice stejného typu jako A , pouze o řád menší. Postupujeme tedy indukcí dále a po dalších $n-2$ krocích dostaneme

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & 1 & \dots & 1 & 0 & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

Nyní od prvního řádku odečteme druhý, pak od druhého třetí, atd. až od předposledního ten poslední. Dostaneme matici, kde hledaná inverze A^{-1} je napravo

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 1 & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

Cv. 4.9 Mějme blokovou matici $\begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & C \end{pmatrix}$ s bloky $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (a) Rozhodněte, kdy je regulární.
- (b) Určete inverzi, pokud $B = 0_n$.
- (c) Určete inverzi obecně.

Řešení:

- (a) Regularitu můžeme otestovat Gaussovou eliminací převodem do odstupňovaného tvaru. Uvědomme si, že při eliminaci řádků odpovídajících matici A nijak neupravujeme řádky odpovídající C a naopak. Regularita matice je proto podmíněna regularitou bloku C , v opačném případě bychom dostali nulový řádek. Pokud je blok C regulární, jsme schopni matici převést do tvaru

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & C \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}.$$

Tedy pokud by nebyl blok A regulární, mohli bychom z tohoto tvaru získat Gaussovou eliminací nulový řádek. Regularita bloků A , C je tedy nutnou podmínkou regularity matice.

Zároveň regularita A , C zajišťuje, že můžeme převést matici do tvaru

$$\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix},$$

což je redukovaný odstupňovaný tvar původní matice s plnou hodnotí. Regularita bloků A , C je tedy jak nutnou, tak i postačující podmínkou regularity.

- (b) Pro výpočet inverze můžeme blokově zapsat rozšířenou soustavu jako

$$\left(\begin{array}{cc|cc} A & 0_n & I_n & 0_n \\ 0_n & C & 0_n & I_n \end{array} \right).$$

Podobně jako v předchozím podúloze se při G-J eliminaci budou upravovat řádky odpovídající blokům A a C nezávisle na sobě. Při převodu $(A \ 0_n | I_n \ 0_n)$ se nulové bloky 0_n po celou dobu výpočtu nebudou měnit a nebude na nich záviset ani podoba eliminace. Na konci eliminace proto dostaneme $(I_n \ 0_n | A^{-1} \ 0_n)$. Obdobný průběh bude mít i výpočet na podmatici $(0_n \ C | 0_n \ I_n)$. Inverzní matice má proto tvar

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & 0_n \\ 0_n & C^{-1} \end{pmatrix}.$$

- (c) Pro výpočet inverze můžeme blokově zapsat rozšířenou soustavu jako

$$\left(\begin{array}{cc|cc} A & B & I_n & 0_n \\ 0_n & C & 0_n & I_n \end{array} \right).$$

Opět využijeme nezávislosti eliminace pro řádky odpovídající blokům A a C a převedeme matici nejprve do tvaru

$$\left(\begin{array}{cc|cc} A & B & I_n & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n & C^{-1} \end{array} \right).$$

Klíčové je, že po zbytek eliminace se spodní dva bloky již měnit nebudou. Víme tedy, že inverzní matice má tvar

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ 0_n & C^{-1} \end{pmatrix},$$

kde matice X, Y zatím neznáme. Určit je můžeme ze vztahu matice a její inverze,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ 0_n & C^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}.$$

Z tohoto vztahu můžeme odvodit dvojici soustav,

$$AX = I_n \quad \text{a} \quad AY + BC^{-1} = 0_n.$$

Z první soustavy dostáváme $X = A^{-1}$, z druhé $Y = -A^{-1}BC^{-1}$. Inverzní matice má tedy tvar

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0_n & C^{-1} \end{pmatrix}.$$

Poznámka. Alternativní způsob získání matic X, Y je, že upravujeme přímo bloky v matici

$$\left(\begin{array}{cc|cc} A & B & I_n & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n & C^{-1} \end{array} \right).$$

První blokový řádek vynásobíme maticí A^{-1} (z bodu (a) víme, že existuje):

$$\left(\begin{array}{cc|cc} I_n & A^{-1}B & A^{-1} & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n & C^{-1} \end{array} \right)$$

a nakonec od prvního blokového řádku odečteme $A^{-1}B$ -násobek druhého:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} I_n & 0_n & A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0_n & I_n & 0_n & C^{-1} \end{array} \right)$$

Cv. 4.10 Uvažujme matici v blokovém tvaru

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ b & C \end{pmatrix},$$

kde $\alpha \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}^{n-1}$ a $C \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$. Aplikujte na matici jednu iteraci Gaussovy eliminace a odvoďte rekurentní vzoreček na test regularity.

Řešení:

Od druhého řádkového bloku odečteme $\frac{1}{\alpha}b$ -násobek prvního řádku a dostaneme

$$\begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ b - \alpha \frac{1}{\alpha}b & C - \frac{1}{\alpha}ba^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ 0 & C - \frac{1}{\alpha}ba^T \end{pmatrix}.$$

Tím jsme provedli jednu iteraci Gaussovy eliminace. Protože pivot vlevo nahoře je nemulový, můžeme usoudit, že matice A je regulární právě tehdy, když je regulární matice $C - \frac{1}{\alpha}ba^T$. Tím jsme zredukovali test regularity matice řádu n na regularity matice matice řádu $n - 1$.