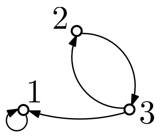
Tahák na relace, zobrazení a uspořádání

Definice: Binární relace R je množina uspořádaných dvojic. Jsou-li X a Y množiny, nazývá se libovolná podmnožina kartézského součinu $X \times Y$ relací mezi X a Y. Často nás bude zajímat relace mezi prvky té samé množiny. Pak mluvíme o relaci na množině X, tedy libovolné podmnožině $R \subseteq X \times X = X^2$. To, že je prvek x v relaci s prvkem y často zkráceně zapisujeme xRy.



	1	2	3
1	1	0	0
2	0	0	1
3	1	1	0

Příklad: Mějme množinu $X = \{1, 2, 3\}$ a relaci $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$. Tuto relaci můžeme mimo množinového zápisu reprezentovat i tabulkou, či maticí sousednosti. Nula na pozici (x, y) reprezentuje, že prvky x a y nejsou v relaci, jednička že v relaci jsou. Další možností je reprezentovat jednotlivé prvky množiny X body v rovině a kreslit mezi nimi šipky z x do y, pokud je x s y v relaci.

Vlastnosti relace

Vlastnost	Definice	Příklad pro $X = \{a, b, c\}$
reflexivita	Relace R na mn. X je reflexivní právě tehdy, když $\forall x \in X : xRx$.	$R = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$
symetrie	Relace R na mn. X je symetrická právě tehdy, když $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$	$R = \{(a, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b)\}$
antisymetrie	Relace R na mn. X je antisymetrická právě tehdy, když $\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$	$R = \{(a, a), (b, c), (a, c), (b, a), (c, c)\}$
tranzitivita	Relace R na mn. X je tranzitivní právě tehdy, když $\forall x, y, z \in X : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$	$R = \{(a, b), (b, c), (a, c), (b, b)\}$

Ještě jednou a lidsky: Relace je *reflexivní*, pokud je každý prvek z X v relaci sám se sebou. Pokud pro každé x v relaci s y platí, že i y je v relaci s x, relace je *symetrická.* Relace je *tranzitivní*, pokud když vede šipka mezi x a y i mezi y a z, tak vede i šipka mezi x a z.

Antisymetrie je o trochu záludnější. Ve skutečnosti rozlišujeme dva druhy antisymetrie – silnou a slabou. *Silná antisymetrie* znamená přesný opak symetrie – je-li x v relaci s y, nemůže být y v relaci s x. *Slabá antisymetrie*, kterou obvykle nazýváme jen *antisymetrie* znamená skoro to samé, ale připouští aby byl prvek v relaci sám se sebou.

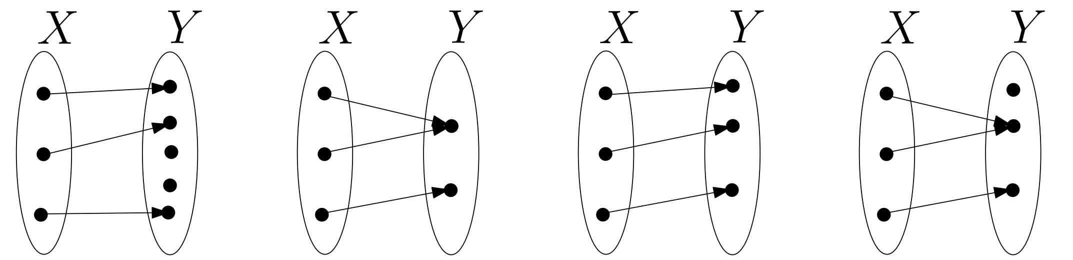
Může být relace zároveň symetrická i antisymetrická? Ano! Uvažme relaci $R = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$. Může být relace zároveň symetrická i silně antisymetrická? Ano, ale taková je pouze jedna a to prázdná relace $R = \{\}$.

Zobrazení

Definice: Zobrazení z množiny X do množiny Y je relace $f \subseteq X \times Y$, kde platí, že pro každý prvek $x \in X$ existuje právě jeden prvek $y \in Y$ tž. $(x, y) \in f$.

Zobrazení f z množiny X do množiny Y obvykle značíme $f : X \to Y$. Symbolem $f(x)$ značíme právě to jediné $y \in Y$ s nímž je prvek $x \in X$ v relaci.

Vlastnost	Definice
prosté zobrazení	Zobrazení $f : X \to Y$ je prosté, jestliže pro $x \neq y$ je $f(x) \neq f(y)$.
zobrazení na	Zobrazení $f : X \to Y$ je na, jestliže pro každé $y \in Y$ existuje $x \in X$ tž. $f(x) = y$.
bijekce	Zobrazení $f : X \to Y$ je bijekce, jestliže je prosté a na.



(a) Prosté, není na (b) Na, není prosté (c) Bijekce (d) Ani prosté, ani na

Ekvivalence

Definice: Řekneme, že relace R na mn. X je *ekvivalence*, jestliže je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Jestliže prvky x a y jsou spolu v relaci, pak také patří do stejné *třídy ekvivalence*. Třída ekvivalence je maximální (co do inkluze) množina prvků takových, že jsou spolu všechny po dvou navzájem v relaci. Třídami ekvivalence je relace ekvivalence jednoznačně určena.

Částečná a lineární uspořádání

Definice: Řekneme, že relace R na mn. X je uspořádání na X, jestliže je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní. Takové uspořádání pak značíme (X, R).

Definice: Řekneme, že relace R na mn. X je lineární uspořádání, jestliže je to uspořádání a navíc pro každé $x, y \in X$ je xRy nebo yRx.

Samotnému uspořádání, které nemusí být nutně lineární říkáme také částečné uspořádání. Lineární uspořádání je takové uspořádání, v němž jsou každé dva prvky porovnatelné. Nemůže ovšem pro různé x a y platit $xRy \wedge yRx$, protože taková relace by nebyla antisymetrická a tudíž by se vůbec nejednalo o uspořádání.

Příklad	**Rozhodnutí**
$(\mathbb{N}, \leq)$	Je uspořádání (splňuje, reflexivitu, antisymetrii a tranzitivitu) i lineární uspořádání (všechny prvky jsou navzájem porovnatelné.
$(\mathbb{N}, <)$	Není uspořádání (nesplňuje reflexivitu) a tím pádem ani lineární uspořádání.
$(\mathbb{N}, \mid)$	Je uspořádání, ale není lineární (např. 5 nedělí 7, ani 7 nedělí 5, tedy 5 a 7 jsou neporovnatelné).

Pro názornost budeme nadále říkat, že prvek x je v relaci R pod prvkem y, pokud je xRy. Analogicky budeme říkat, že prvek x je v relaci R nad prvkem y, pokud je yRx.

Maximální a největší prvky, suprema, řetězce, antiřetězce

Definice: Prvek a je největším prvkem uspořádání $(X, \preceq)$, jestliže $\forall x \in X$ platí $x \preceq a$.

Tedy, prvek a je největším prvkem uspořádání, pokud jsou všechny ostatní prvky pod ním. Všimněte si, že nemusíme řešit, zda je x různé od a, protože v uspořádání musí platit reflexivita, tedy vždy platí $a \preceq a$.

Definice: Prvek b je maximálním prvkem uspořádání $(X, \preceq)$, jestliže neexistuje $x \in X$ různé od b takové, že $b \preceq x$.

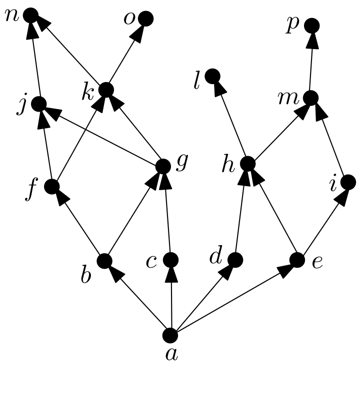
Tedy, prvek b je maximálním prvkem uspořádání, jestliže žádný prvek není nad ním. Z definice je zjevné, že maximálních prvků může existovat i více. Pokud existuje pouze jeden, je zároveň prvkem největším. Pokud existuje více maximálních prvků, největší neexistuje. Analogicky můžeme definovat i nejmenší a minimální prvek.

Definice: Mějme uspořádání $(X, \preceq)$. Horní závorou množiny $Y \subseteq X$ rozumíme prvek $a \in X$ takový, že $\forall y \in Y : x \preceq a$. Supremum je nejmenší (ve smyslu uspořádání) horní závorou.

Horními závorami jsou tedy prvky, které jsou nad všemi prvky z množiny Y. Z nich nejmenší (ve smyslu nejmenšího prvku uspořádání, tak jak byl definován výše) je supremum. Podobně definujeme i infimum, které je naopak největší dolní závorou. Může se nám stát, že množina horních závor je neprázdná, ale žádná z nich není nejmenší – pak supremum dané množiny v uspořádání $(X, \preceq)$ neexistuje. Zvláštní pozornost je třeba věnovat prázdné množině. Horními závorami prázdné množiny jsou všechny prvky uspořádání a supremem prázdné množiny je pak nejmenší prvek uspořádání (existuje-li). Stejně tak infimem prázdné množiny je největší prvek uspořádání.

Definice: Řetězec v uspořádání $(X, \preceq)$ je množina navzájem porovnatelných prvků.

Definice: Množinu A v uspořádání $(X, \preceq)$ nazveme nezávislou, jestliže pro žádnou dvojici různých prvků $x, y \in A$ neplatí $x \preceq y$. Nezávislou množinu též nazýváme antiřetězec.



Nezávislá množina, či antiřetězec je tedy množina po dvou neporovnatelných prvků.

Příklad: Obrázek nalevo znázorňuje částečné uspořádání (tranzitivní hrany vynecháváme). Uspořádání má jen jediný minimální prvek, který je zároveň nejmenším – prvek a. Má čtyři maximální prvky – n, o, l a p, největší prvek neexistuje. Supremem množiny $\{b, c, g\}$ je prvek g, infimem prvek a. Množina $\{f, g\}$ nemá definované supremum, její infimum je b. Množina $\{j, k, o\}$ nemá definované supremum, ani infimum.

Nejdelším řetězcem je např. množina $\{a, b, g, k, n\}$, ale existuje více stejně dlouhých řetězců. Nejdelším antiřetězcem je např. množina $\{j, k, h, i\}$.

Tahák sepsal Honza „Stínovlas“ Musílek `<stinovlas@kam.mff.cuni.cz>` pro studenty předmětu Diskrétní matematika na MFF UK v roce 2015/2016. Revidováno v roce 2016/2017.