DM cvičení 9 – 8. 12. 2016

Příklad 1. Sousedům se narodily dvě děti a vy víte, že jedno z nich se jmenuje Pepíček. Jaká je pravděpodobnost, že i druhé z nich je chlapec? Předpokládejme, že každé dítě se narodí náhodně s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ jako chlapec.

Příklad 2. Pojďme hodit n-krát spravedlivou mincí. Jaká je pravděpodobnost, že padlo právě k hlav? Jaká je pravděpodobnost, že počet hlav je sudý? Jaká je pravděpodobnost, že padne právě k hlav, kdybychom měli minci, která je cinknutá (tj. hlava padá s pravděpodobností p, orel $1-p$).

Příklad 3. Tři střelci vypálili naráz na divočáka, který byl jedinou kulkou zasažen. Určete pravděpodobnnost, že ho zastřelil první, druhý nebo třetí střelec (pro jednotlivé střelce zvlášť), jsou-li jejich pravděpodobnosti zásahu následující: 1. střelec $= 0.2$, 2. střelec $= 0.4$ a 3. střelec $= 0.6$.

Příklad 4. V zábavném pořadu *Let's Make a Deal* nabízel moderátor Monty Hall výhru pod následujícími pravidly: Výhra – automobil je schovaná za jedněmi ze tří dveří. Za zbylými dvěmi je cena útěchy – koza. Hráč nejprve na nějaké dveře ukáže. Moderátor, který ví kde se skrývá výhra, otevře z ostatních dveří takové, že za nimi výhra není. V této situaci má hráč otevřít jedny ze dvou zbylých dveří, aby dostal co se za nimi skrývá.

Je pro hráče výhodné změnit názor a otevřít jiné dveře, než na které prve ukázal?

Příklad 5. Nechť X je náhodná veličina odpovídající hodu spravedlivou mincí, tzn. s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ je $X = 0$ a s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ je $X = 1$. Buď Y náhodná veličina odpovídající hodu „začarovanou“ mincí, takže $Y = X$. Buď Z náhodná veličina odpovídající hodu druhou obyčejnou mincí, tzn. je definovaná stejně jako X.

Kolik je $E[X + Y]$ a $E[X \cdot Y]$? A kolik $E[X + Z]$ a $E[X \cdot Z]$?

Příklad 6. Jaká je střední hodnota počtu pevných bodů v náhodné permutaci?

Příklad 7. Po dlouhé noci se m opilých námořníků vrací do n kajut (rovnoměrně náhodně).

a) Kolik bude průměrně námořníků v jedné kajutě?
b) Kolik bude průměrně prázdných kajut?

Podmíněná pravděpodobnost:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Jevy A a B jsou nezávislé právě tehdy, když:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Bayesova věta:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Web cvičení: `http://kam.mff.cuni.cz/∼stinovlas/`
E-mail: `stinovlas@kam.mff.cuni.cz`

Hint: BÚNO předpokládejme, že hráč ukázal na první dveře. Uvažme, že moderátor otevře druhé dveře, což označíme jako jev B. Musíme určit podmíněnou pravděpodobnost $P(A_i|B)$, kde A_i značí jev, kdy výhra je za i-tými dveřmi. Využijete Bayesovu větu ;-).