DM cvičení 4 – 31. 10. 2016

Příklad 1. Najděte relace R a S na téže množině X takové, že $R \circ S \neq S \circ R$.

Příklad 2. Najděte zobrazení R a S na téže množině X takové, že $R \circ S \neq S \circ R$.

Příklad 3. Nalezněte relaci R na vhodné množině X takovou, že $\forall n \in \mathbb{N} : R^n \neq R^{n+1}$. Výraz R^n znamená n-krát složenou relaci R.

Příklad 4. Rozhodněte, zda jsou následující relace (X, R) ekvivalence a pokud ano, určete jejich třídy ekvivalence.

a) $X = \mathbb{N}$, $xRy \Leftrightarrow 7|(x-y)$
b) $X = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $xRy \Leftrightarrow x|y \wedge y|x$
c) $X = \mathbb{N}$, $xRy \Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{N} : z|y \wedge z|x$.
d) $X = \mathbb{N}$, $xRy \Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{N} : z|y \wedge z|x \wedge z > 1$.
e) $X = \mathbb{R}^2$, $(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \Leftrightarrow \mathrm{sgn}(x_1) = \mathrm{sgn}(x_2) \wedge \mathrm{sgn}(y_1) = \mathrm{sgn}(y_2)$

Příklad 5. Rozhodněte, které z následujících relací (X, R) jsou uspořádání. Která z těchto uspořádání jsou lineární?

a) $X = \mathbb{N}$, $(x, y) \in R \Leftrightarrow x = y \vee x^5 \leq y^3$
b) $X = \mathbb{N}^2$, $((a, b), (c, d)) \in R \Leftrightarrow a + b \leq c + d$
c) $X = \mathbb{N}^2$, $((a, b), (c, d)) \in R \Leftrightarrow a = b \wedge c \leq d$
d) X je množina funkcí reálné proměnné s definičním oborem $\langle 0, 1\rangle$, $(f, g) \in R \Leftrightarrow \forall x \in \langle 0, 1\rangle : f(x) \leq g(x)$

Příklad 6. Mějme zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definované pomocí předpisu $f(x) = x^2 - 1$. Je toto zobrazení prosté? Je na? Mějme zobrazení $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definované stejným předpisem. Je toto zobrazení prosté? Je na?

Příklad 7. Může existovat uspořádání na nekonečné množině, které obsahuje nekonečný řetězec i antiřetězec? Pokud ano, najděte nějaké takové.

Příklad 8. Nalezněte nejdelší řetězce a antiřetězce na uspořádáních:

a) $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, |)$
b) $(2^{\{1,\dots,n\}}, \subseteq)$
c) $(\mathbb{N}, R)$, kde $\forall x, y \in \mathbb{N} : xRy \Leftrightarrow x + y < 1$
d) $(\mathbb{N}, S)$, kde $\forall x, y \in \mathbb{N} : xSy \Leftrightarrow x - y < 1$

Web cvičení: `http://kam.mff.cuni.cz/~stinovlas/`
E-mail: `stinovlas@kam.mff.cuni.cz`