DM cvičení 2 – 17. 10. 2016

Úlohy z přednášky

Příklad α. Najděte relaci R na $\{1,2,3,4\}$, která je symetrická i antisymetrická a relaci S na $\{1,2,3,4\}$, která není symetrická ani antisymetrická.

Příklad β. Dokažte, že funkce na konečné množině je prostá právě tehdy, když je na. Platí to i pro nekonečnou množinu?

Příklad γ. Jaké zobrazení vznikne složením dvou zobrazení prostých, na, bijekcí či jejich kombinací?

Relace a zobrazení

Příklad 1. Buďte R a S reflexivní relace na téže množině. Které z následujících relací jsou také reflexivní?
$R \cup S$, $R \cap S$, $R \setminus S$, $R \Delta S$, $R \circ S$, R^{-1}

Příklad 2. Buďte R a S tranzitivní relace na téže množině. Které z následujících relací jsou také tranzitivní?
$R \cup S$, $R \cap S$, $R \setminus S$, $R \Delta S$, $R \circ S$, R^{-1}

Příklad 3. Nechť R je relace na $X = \{1,2,3,4\}$ daná výčtem dvojic $R = \{(1,2),(1,4),(2,1),(4,4)\}$. Určete relaci $R \circ R$ a rozhodněte, zdali je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Příklad 4. Mějme zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definované pomocí předpisu $f(x) = x^2 - 1$. Je toto zobrazení prosté? Je na? Mějme zobrazení $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definované stejným předpisem. Je toto zobrazení prosté? Je na?

Příklad 5. Určete počet binárních relací na čtyřech prvcích. Nejprve všech, poté reflexivních, symetrických a antisymetrických.

Uspořádání

Příklad 6. Uvažme relaci „x je dělitelem čísla y“ na množině $\{1,\dots,n\}$ pro $n \geq 10$.

a) Dokažte že tato relace je částečné uspořádání.
b) Určete minimální a maximální prvky uspořádání (existují-li).
c) Určete nejmenší a největší prvky uspořádání (existují-li).
d) Určete nějakou dvojici neporovnatelných prvků, nebo ukažte, že žádná taková neexistuje.

Příklad 7. Které z následujících relací na množině $\mathbb{N}^2$ jsou uspořádání? Která z těchto uspořádání jsou lineární? Jaké jsou jejich minimální, maximální, nejmenší a největší prvky?

a) Porovnání v obou složkách $\leq_A$: $(a,b) \leq_A (c,d) \Leftrightarrow a \leq c \wedge b \leq d$
b) Porovnání v obou složkách, ve druhé opačně $\leq_B$: $(a,b) \leq_B (c,d) \Leftrightarrow a \leq c \wedge b \geq d$
c) Porovnání součtu obou složek $\leq_+$: $(a,b) \leq_+ (c,d) \Leftrightarrow a+b \leq c+d$
d) Rovnost v první složce a porovnání ve druhé $\leq_C$: $(a,b) \leq_C (c,d) \Leftrightarrow a = b \wedge c \leq d$

Příklad 8. Rozhodněte, zda může existovat uspořádání na neprázdné konečné množině:

a) bez největšího prvku
b) bez největšího i nejmenšího prvku
c) bez největšího prvku, ale s maximálním prvkem
d) bez maximálního prvku, ale s největším prvkem

Web cvičení: `http://kam.mff.cuni.cz/~stinovlas/`
E-mail: `stinovlas@kam.mff.cuni.cz`

Příklad 9. Rozhodněte, zda může existovat uspořádání na nekonečné množině:

a) bez největšího i nejmenšího prvku
b) bez největšího prvku, ale s maximálním prvkem
c) bez maximálního prvku, ale s největším prvkem
d) bez nekonečného řetězce

Příklad 10. Může existovat uspořádání na nekonečné množině, které obsahuje nekonečný řetězec i antiřetězec? Pokud ano, najděte nějaké takové.

Příklad 11. Určete počet různých ekvivalencí na pětiprvkové množině.

Příklad 12. Uvažme neorientovaný graf G a relaci R na jeho vrcholech takovou, že $(u, v) \in R$ právě tehdy, když mezi u a v vede cesta.

a) Dokažte, že R je ekvivalence.
b) Určete třídy ekvivalence relace R.

Příklad 13. Nalezněte nejdelší řetězce a antiřetězce na uspořádáních:

a) $(\{1, \ldots, n\}, |)$
b) $(2^{\{1,\ldots,n\}}, \subseteq)$