

DM cvičení 2 – 13. 10. 2016

Úlohy z přednášky

Příklad α . Najděte relaci R na $\{1, 2, 3, 4\}$, která je symetrická i antisymetrická a relaci S na $\{1, 2, 3, 4\}$, která není symetrická ani antisymetrická.

Příklad β . Dokažte, že funkce na konečné množině je prostá právě tehdy, když je na. Platí to i pro nekonečnou množinu?

Příklad γ . Jaké zobrazení vznikne složením dvou zobrazení prostých, na, bijekcí či jejich kombinací?

Relace a zobrazení

Příklad 1. Buďte R a S reflexivní relace na téže množině. Které z následujících relací jsou také reflexivní?

$$R \cup S, R \cap S, R \setminus S, R \Delta S, R \circ S, R^{-1}$$

Příklad 2. Buďte R a S tranzitivní relace na téže množině. Které z následujících relací jsou také tranzitivní?

$$R \cup S, R \cap S, R \setminus S, R \Delta S, R \circ S, R^{-1}$$

Příklad 3. Nechť R je relace na $X = \{1, 2, 3, 4\}$ daná výčtem dvojic $R = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1), (4, 4)\}$. Určete relaci $R \circ R$ a rozhodněte, zdali je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Příklad 4. Mějme zobrazení $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definované pomocí předpisu $f(x) = x^2 - 1$. Je toto zobrazení prosté? Je na? Mějme zobrazení $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definované stejným předpisem. Je toto zobrazení prosté? Je na?

Příklad 5. Určete počet binárních relací na čtyřech prvcích. Nejprve všech, poté reflexivních, symetrických a antisymetrických.

Uspořádání

Příklad 6. Uvažme relaci „ x je dělitelem čísla y “ na množině $\{1, \dots, n\}$ pro $n \geq 10$.

- Dokažte že tato relace je částečné uspořádání.
- Určete minimální a maximální prvky uspořádání (existují-li).
- Určete nejmenší a největší prvky uspořádání (existují-li).
- Určete nějakou dvojici neporovnatelných prvků, nebo ukažte, že žádná taková neexistuje.

Příklad 7. Které z následujících relací na množině \mathbb{N}^2 jsou uspořádání? Která z těchto uspořádání jsou lineární? Jaké jsou jejich minimální, maximální, nejmenší a největší prvky?

- Porovnání v obou složkách \leq_A : $(a, b) \leq_A (c, d) \Leftrightarrow a \leq c \wedge b \leq d$
- Porovnání v obou složkách, ve druhé opačně \leq_B : $(a, b) \leq_B (c, d) \Leftrightarrow a \leq c \wedge b \geq d$
- Porovnání součtu obou složek \leq_+ : $(a, b) \leq_+ (c, d) \Leftrightarrow a + b \leq c + d$
- Rovnost v první složce a porovnání ve druhé \leq_C : $(a, b) \leq_C (c, d) \Leftrightarrow a = b \wedge c \leq d$

Příklad 8. Rozhodněte, zda může existovat uspořádání na neprázdné konečné množině:

- bez největšího prvku
- bez největšího i nejmenšího prvku
- bez největšího prvku, ale s maximálním prvkem
- bez maximálního prvku, ale s největším prvkem

Příklad 9. Rozhodněte, zda může existovat uspořádání na nekonečné množině:

- a) bez největšího i nejmenšího prvku
- b) bez největšího prvku, ale s maximálním prvkem
- c) bez maximálního prvku, ale s největším prvkem
- d) bez nekonečného řetězce

Příklad 10. Může existovat uspořádání na nekonečné množině, které obsahuje nekonečný řetězec i antiřetězec? Pokud ano, najděte nějaké takové.

Příklad 11. Určete počet různých ekvivalencí na pětiprvkové množině.

Příklad 12. Uvažme neorientovaný graf G a relaci R na jeho vrcholech takovou, že $(u, v) \in R$ právě tehdy, když mezi u a v vede cesta.

- a) Dokažte, že R je ekvivalence.
- b) Určete třídy ekvivalence relace R .

Příklad 13. Nalezněte nejdelší řetězce a antiřetězce na uspořádáních:

- a) $(\{1, \dots, n\}, |)$
- b) $(2^{\{1, \dots, n\}}, \subseteq)$