DM cvičení 11 – 22. 12. 2016

Příklad z minula:. Uvažte k-tou mocninu matice sousednosti grafu G. Dokažte, že číslo na pozic (i, j) vyjadřuje počet sledů délky k z vrcholu i do vrcholu j.

Příklad 1. Je následující posloupnost skóre grafu? Pokud ne, zdůvodněte, pokud ano, nakreslete ho.

a) $(1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4)$

b) $(1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5)$

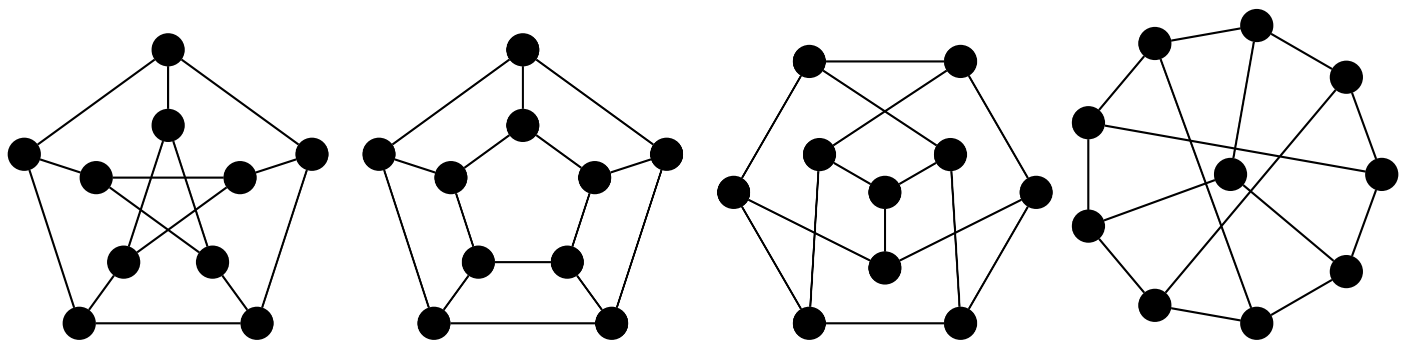
c) $(1, 1, 2, 3, 3, 6)$

d) $(1, 2, 3, 4, 5, 5, 6)$

e) $(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$

Příklad 2. Existuje bipartitní graf na alespoň 5 vrcholech, jehož doplněk je taky bipartitní? Pokud ano, nakreslete ho, pokud ne, dokažte proč.

Příklad 3. Určete, zda jsou následující grafy G_1 až G_4 po dvou izomorfní. Pokud ano, ukažte bijekci mezi množinami vrcholů. Pokud ne, uveďte proč.



(a) G_1 (b) G_2 (c) G_3 (d) G_4

Příklad 4. Dokažte, že doplněk každého nesouvislého grafu je souvislý. Musí to platit obráceně? Tedy musí být každý graf se souvislým doplňkem nesouvislý? Dokažte.

Příklad 5. Najděte souvislý graf na třech vrcholech takový, že každá mocnina jeho matice sousednosti obsahuje nuly.

Příklad 6. Ukažte, že každý graf, jehož všechny vrcholy mají stupeň alespoň 2, obsahuje kružnici jako podgraf.

Příklad 7. Dokažte, že graf, v němž jsou stupně všech vrcholů sudé, neobsahuje most, tedy hranu, jejímž odebráním se zvýší počet komponent.

Příklad 8. Ukažte, že je-li graf G eulerovský, pak jeho line graf je také eulerovský. Line graf $L(G)$ má za vrcholy hrany G a dva vrcholy v $L(G)$ reprezentující hrany e a f spolu sousedí právě tehdy, když e a f mají společný vrchol.

Příklad 9. Dokažte, že každý eulerovský graf je disjunktním sjednocením kružnic.

Příklad 10. Dokažte, že pro každý souvislý graf G s mostem e je hrana e obsažena v každé kostře G.

Příklad 11. Ukažte, že pro každou kostru K grafu G a hranu $e \in E(G) \setminus E(K)$ existují dvě hrany kostry e' a e'' takové, že jak $K \setminus e' \cup e$, tak $K \setminus e'' \cup e$ jsou opět kostry grafu G.

Příklad 12. Existuje kubický (tj. 3-regulární) rovinný graf, který obsahuje jednu dvacetiúhelníkovou stěnu a deset pětiúhelníkových stěn (a žádné další)? Pokud ano, nakreslete jej, pokud ne, dokažte.

Příklad 13. Dokažte, že platónská tělesa (pravidelný čtyřstěn, šestistěn, osmistěn, dvanáctistěn a dvacetistěn) jsou rovinné grafy.

Příklad 14. Charakterizujte duály jednotlivých platónských těles.

Příklad 15. Ukažte, že má-li rovinný graf všechny vrcholy sudého stupně, pak je barevnost jeho duálu rovna dvěma.

Příklad 16. Dokažte větu o čtyřech barvách pro rovinné grafy bez trojúhelníků.

Definice: *Hranol* grafu G získáme tak, že vezmeme jeho dvě disjunktní kopie $G = (V, E), G' = (V', E')$ a hranou spojíme odpovídající vrcholy (tedy přidáme hrany $\{v_1, v_1'\}, \ldots, \{v_n, v_n'\}$). Pro představu: $Hranol(C_4)$ je pravidelný šestistěn.

Příklad 17. Pokud G měl uzavřený eulerovský tah, bude ho mít i $Hranol(G)$? Co musí platit, aby $Hranol(G)$ měl uzavřený eulerovský tah?

Příklad 18. Pokud byl G bipartitní, bude $Hranol(G)$ taky bipartitní?

Příklad 19. V jakém vztahu je $\chi(G)$ a $\chi(Hranol(G))$ pokud $\chi(G) > 1$?

Příklad 20. Je graf $Hranol(Hranol(C_4))$ rovinný? Pokud ano, nakreslete jej, pokud ne, dokažte proč.

Příklad 21.

a) Určete chromatické číslo grafu K_n po odebrání jedné hrany.
b) Odeberte z grafu K_n tři hrany tak, aby jeho barevnost klesla co nejvíc.

Příklad 22. Ukažte, že když graf G obsahuje lichý cyklus jako podgraf, tak taky obsahuje lichý cyklus jako indukovaný podgraf.

Důkaz věty o pěti barvách

Na každý graf, co rovinný jest,
pět barev nám postačí.
Důkaz máme dobrá to zvěst,
Robert s Petrem naznačí.
Důkaz máme dobrá to zvěst,
Honza s Tomem naznačí.

Indukce se při tom hodí
podle počtu vrcholů.
Máme-li jich nejvýše pět
splníme část úkolu.

Vrcholů je nyní mnoho,
stupeň ”vé”buď nejmenší,
zbavíme se vrcholu toho
indukce zbytek vyřeší.

Málo barev na sousedech
”vé”obarvit umožní,
Euler říká stupeň má pět,
to nám velmi dobře zní.

Dva protější uzly spojme,
”a”modrý, ”bé”červený,
další dva si označíme,
”cé”žlutý, ”dé”zelený.

Ze dvou cest jedna nevede,
platí k naší radosti,
ať je to ta mezi ”cé”, ”dé”,
bez újmy na obecnosti.

V zelenožluté podgraf vezmem,
souvislý a s uzlem ”dé”,
zaměnit v něm barvy můžem,
”vé”už pak obarvit jde.

Všechno správně obarveno,
nepřišli jsme k úrazu.
Laik se diví, znalec žasne,
to je konec důkazu.
Laik se diví, znalec žasne,
to je konec ach důkazu

Web cvičení: `http://kam.mff.cuni.cz/~stinovlas/`
E-mail: `stinovlas@kam.mff.cuni.cz`