DM cvičení 1 – 6. 10. 2016

Příklad 0. Na tyči dlouhé 1m je rozmístěno 101 mravenců (1cm od sebe). Ve chvíli startu se každý mravenec rozeběhne buď vlevo nebo vpravo rychlostí $10^{-1} m.s^{-1}$. Ve chvíli, kdy se mravenci potkají, oba se otočí a běží opačným směrem. Mravenec, který přeběhne přes okraj tyče spadne dolů a dál se našeho příkladu neúčastní. Určete nejbližší okamžik od startu, ve kterém se již na tyči nebude nacházet ani jeden mravenec.

Příklad 1. Dokažte matematickou indukcí, že

$$4 | 6n^2 + 2n$$

Příklad 2. Dokažte matematickou indukcí, že šachovnice velikosti $2^n \times 2^n$ lze vydláždit kostičkami tvaru L o třech dílkách tak, že je právě jedno políčko šachovnice nevydlážděné.

Příklad 3. Dokažte, že počet posloupností nul a jedniček délky n, které neobsahují dvě nuly těsně vedle sebe, je roven F_{n+2}.

Příklad 4. **Tvrzení:** Všichni koně mají stejnou barvu.

Důkaz: Indukcí podle počtu koní. Máme-li jednoho koně, pak zjevně všichni koně mají stejnou barvu. Předpokládejme, že tvrzení platí pro všechny skupiny N koní a chceme jej dokázat pro $N + 1$ koní. Vezměme tedy skupinu $N + 1$ koní. Je-li v ní kůň jiné barvy, než všichni ostatní, pak vypustíme libovolného jiného koně. Z indukce mají všichni koně v této skupině stejnou barvu, což je spor s tím, že některý z $N + 1$ koní měl jinou barvu. □

Kde je problém?

Příklad 5. Dokažte, že prvočísel je nekonečně mnoho.

Příklad 6. Dokažte matematickou indukcí následující vzorečky:

$$\sum_{i=1}^{n} 4i + 5 = 2n^2 + 7n \qquad \prod_{i=2}^{n} \frac{i-1}{i} = \frac{1}{n}$$

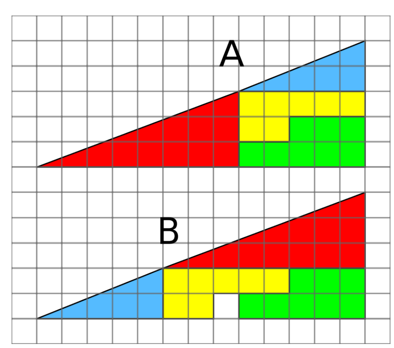
Příklad 7. Dokažme indukcí následující tvrzení. Nechť $p_1, \ldots, p_n$ je $n \geq 2$ různých přímek v rovině, žádné dvě nejsou rovnoběžné. Potom všechny tyto přímky mají společný bod.

1. Pro $n = 2$ tvrzení platí.

2. Nechť tvrzení platí pro n_0 přímek. Mějmě $n = n_0 + 1$ přímek $p_1, \ldots, p_n$. Podle indukčního předpokladu mají přímky $p_1, \ldots, p_{n-1}$ společný bod, označme ho x. Stejně tak mají přímky $p_1, \ldots, p_{n-2}, p_n$ společný bod y. Přímka p_1 leží v obou skupinách, tedy jsou na ní oba body x a y. Totéž platí i pro přímku p_{n-2}. Jelikož jsou přímky p_1 a p_2 podle předpokladu různoběžné, protínají se jen v jednom vrcholu. A tedy $x = y$, což je společný bod přímek $p_1, \ldots, p_n$.

Kde je problém?

Příklad 8. Rozdělením trojúhelníku na části a jejich přeskládáním dostaneme trojúhelník, který je o 1 čtvereček menší. Jak je to možné?



Příklad 9. Dokažte, že počet částí roviny při rozdělení n přímkami je nejvýše $1 + \frac{1}{2}(n^2 + n)$.

Web cvičení: `http://kam.mff.cuni.cz/~stinovlas/`

E-mail: `stinovlas@kam.mff.cuni.cz`