Kombinatorika a Grafy 2 - Úkol 9

Jan Soukup

Odevzdat do začátku příslušného cvičení 20-22.5.2024

$[x^n]f(x)$ značí koeficientu u členu x^n ve vyjádření funkce $f(x)$ pomocí mocninné řady.

1. (1, 5 bod) Nechť d_n je počet různých posloupností $m_1, m_2, \ldots, m_t$ přirozených čísel, kde $1 \leq m_1 < m_2 < \ldots < m_t$ a $m_1 + \ldots + m_t = n$. Například 6 lze vyjádřit jako 6, $1+5$, $2+4$ a $1+2+3$, a proto $d_6 = 4$. Ukažte, že $d_n = [x^n](1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots$ (nekonečný součin, ale rozmyslete si, že k určení koeficientu u x^n stačí vyhodnotit konečně mnoho členů).

2. (1, 5 bod) Nechť l_n je počet různých posloupností $c_1, \ldots, c_t$ přirozených čísel, kde $1 \leq c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_t$ a čísla $c_1, \ldots, c_t$ jsou lichá a $c_1 + \ldots + c_t = n$. Například 6 lze vyjádřit jako $1+5$, $3+3$, $1+1+1+3$ a $1+1+1+1+1+1$, a proto $l_6 = 4$. Ukažte, že $l_n = [x^n]\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdots$

3. (2 bodu) Ukažte, že pro každé n platí $d_n = l_n$.

4. (5 bodů) Nechť $\mathcal{A}$ je množina řetězců (záleží na pořadí různých písmen) z písmen `a`, `b` a `c` takových, že počet výskytů písmene `a` je sudý a písmeno `b` se vyskytuje nejvýše 4-krát, a a_n počet takových řetězců délky n. Najděte vytvořující funkci $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}$. A dále explicitně vyjádřete hodnotu a_n. Poznámka:

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots.$$

5. (bonusová, 6 bodů) Nechť a_n je počet všech permutací na n prvcích jejichž druhá mocnina je identita (jinými slovy největší cyklus v permutaci má délku 2). - Dokažte (kombinatoricky), že $a_{n+1} = a_n + na_{n-1}$. - Najděte explicitní vyjádření exponenciální vytvořující funkce pro posloupnost $(a_0, a_1, \ldots)$.