

Kombinatorika a Grafy 2 - Úkol 8

Jan Soukup

Odevzdat do začátku příslušného cvičení 8-13.5.2024

Orientace grafu G je orientovaný graf \vec{G} vzniklý z G tak, že každou hranu naorientujeme v jednom ze dvou směrů. *Orientovaný uzavřený tah* v \vec{G} je posloupnost $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_m, e_m$ vrcholů a hran taková, že e_i je hrana orientovaná z v_i do v_{i+1} pro $i = 1, \dots, m-1$ a e_m je hrana orientovaná z v_m do v_1 . Speciálně každá smyčka tvoří orientovaný uzavřený tah. Orientovaný graf je *acyklický*, jestliže neobsahuje orientovaný uzavřený tah. Jako $a(G)$ označme počet acyklických orientací grafu G .

1. [3 body] Ukažte, že

$$a(G) = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } E(G) = \emptyset \\ 2a(G - e) & \text{jestliže } e \in E(G) \text{ je most} \\ 0 & \text{jestliže } e \in E(G) \text{ je smyčka} \\ a(G - e) + a(G/e) & \text{jestliže } e \in E(G) \text{ není most ani smyčka} \end{cases}$$

2. [2 body] Ukažte, že $a(G) = T_G(2, 0)$. Můžete použít vztahy z předchozího cvičení, i pokud je neumíte dokázat.

3. [3 body] Ukažte, že mají-li dva grafy pro každé přirozené číslo b stejný počet obarvení barvami $\{1, \dots, b\}$, pak také mají stejný počet acyklických orientací.

4. [2 body] Nechť G je souvislý graf. Každou jeho hranu smažeme náhodně nezávisle s pravděpodobností p . Ukažte, že pravděpodobnost, že výsledný graf je souvislý, je rovna $(1-p)^{r(E)} p^{n(E)} T_G(1, 1/p)$, kde $r(E)$ a $n(E)$ jsou definované jako na přednášce.