

# Kombinatorika a Grafy 2 - Úkol 4

Jan Soukup

Odevzdat do začátku příslušného cvičení 3-8.4.2024

1. [2 body] Ukažte, že každý graf neobsahující  $K_4$  jako minor lze obarvit třemi barvami. (Hint: použijte bonusový příklad z třetího domácího úkolu, který nemusíte dokazovat.)
2. [3 body] Určete největší  $n$  takové, že  $K_{n,n}$  lze nakreslit na torus (a dokažte, že pro větší  $n$  to nelze).
3. [4 body] Nechť  $\Gamma$  je pevně zvolená plocha. Navrhněte algoritmus s polynomiální časovou složitostí, který pro libovolný graf  $G$  nakreslitelný na  $\Gamma$  rozhodne, zda ho lze obarvit 7 barvami. (Hint: rozlište případy, kdy  $\delta(G) \leq 6$  a  $\delta(G) \geq 7$ , kde  $\delta(G)$  je minimální stupeň v  $G$ .)
4. [Bonus za 3 body] Kolika různými (navzájem nehomeomorfními) způsoby lze nakreslit  $K_4$  na torus? (Hint: kružnici lze na torus nakreslit dvěma způsoby – tak, že ohraničuje disk, nebo tak, že rozstříhnutím toru podle této kružnice vznikne válec.)