

# Kombinatorika a Grafy 2 - Úkol 10

Jan Soukup

Odevzdat do začátku normálního času cvičení 27.-29.5.2024

1. [3 body] \*Náhrdelník\* je 12 korálek, z nichž každý má jednu z 5 barev, navlečených na do kruhu uzavřenou nit. Kolik různých náhrdelníků existuje, když náhrdelníky, které se liší pouze rotací nebo zrcadlením, považujeme za stejné?

2. [3 body] Uvažujme přiřazení barev  $\{1, 2, 3\}$  vrcholům cesty s  $n$  vrcholy, kde  $n$  je sudé. Dvě obarvení považujeme za stejná, pokud se liší pouze permutací barev a případně obrácením cesty. Např. obarvení 111231 je stejné jako 222132 (prohození barev 1 a 2) či 213222 (rotace barev  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$  a obrácení cesty). Kolik je různých obarvení v závislosti na  $n$ ?

3. [4 body] Definujme vytvořující funkci  $T(x) = \sum_{n \geq 1} t_n x^n$ , kde  $t_n$  je počet zakořeněných ternárních stromů, kde každý vrchol je buď list nebo má 3 syny, přičemž \*na pořadí synů nezáleží\*. Ukažte, že

$$T(x) = x + \frac{x}{6}(T^3(x) + 3T(x)T(x^2) + 2T(x^3)).$$