Kombinatorika a Grafy 2 - Cvičení 9.5

Jan Soukup

22.4.2024
`https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2324/KAG2/`

1 Tutteův polynom

Definice 1.

- $k(E) = k(V, E) =$ *počet komponent grafu* (V, E)
- Rank $r(E) = r(V, E) = |V| - k(V, E) =$ *počet hran největší acyklické podmnožiny E (můžeme se na to dívat jako na "kostru"v nesouvislém grafu).*
- Nulita $n(E) = |E| - r(V, E) =$ *počet hran největší podmnožiny $F \subseteq E$, tž. $k(V, E \setminus F) = k(V, E)$ (tedy počet hran jejichž odebráním se nezvýší počet komponent).*

Definice 2. Tutteův polynom *grafu $G = (V, E)$ je*

$$T_G(x, y) = \sum_{F \subseteq E} (x-1)^{r(E)-r(F)} \cdot (y-1)^{n(F)}.$$

Tvrzení 1.

$$T_G = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } E(G) = \emptyset \\ xT_{G-e} = xT_{G/e} & \text{jestliže } e \in E(G) \text{ je most} \\ yT_{G-e} = yT_{G/e} & \text{jestliže } e \in E(G) \text{ je smyčka} \\ T_{G-e} + T_{G/e} & \text{jestliže } e \in E(G) \text{ není most ani smyčka} \end{cases}$$

Lemma 2. Jestliže $|V(G_1 \cap G_2)| \leq 1$, pak $T_{G_1 \cup G_2} = T_{G_1} \cdot T_{G_2}$.

Definice 3. Chromatický polynom $\chi_G(b) =$ *počet obarvení G pomocí barev* $\{1, \ldots, b\}$.

1.1 Příklady

Příklad 1. Určete Tutteho polynom pro kružnici délky k.

Příklad 2. Ukažte, že pro souvislý graf $G = (V, E)$ platí:

- $r(F) = r(E)$ pro $F \subseteq E$ právě když (V, F) je souvislý
- $n(F) = 0$ pro $F \subseteq E(G)$ právě když $(V(G), F)$ je les
- $T_G(1, 2) =$ počet souvislých podgrafů G s množinou vrcholů $V(G)$
- $T_G(2, 1) =$ počet acyklických podgrafů G s množinou vrcholů $V(G)$
- $T_G(2, 2) = 2^{|E(G)|}$

Příklad 3. Dokažte (z definice, bez použití vztahu k Tutteho polynomu), že

$$\chi_G(b) = \begin{cases} b^{|V(G)|} & \text{jestliže } E(G) = \emptyset \\ (b-1)\chi_{G/e}(b) & \text{jestliže } e \in E(G) \text{ je most} \\ 0 & \text{jestliže } e \in E(G) \text{ je smyčka} \\ \chi_{G-e}(b) - \chi_{G/e}(b) & \text{jestliže } e \in E(G) \text{ není most ani smyčka} \end{cases}$$

Příklad 4. S použitím předchozího cvičení dokažte vztah

$$\chi_G(b) = (-1)^{r(G)} b^{k(G)} T_G(1-b, 0)$$

indukcí podle počtu hran grafu G.

Příklad 5. Nechť G je souvislý graf nakreslený v rovině a $G^\star$ je jeho duál. Ukažte, že $T_G(x,y) = T_{G^\star}(y,x)$.

2 Chordální grafy z minula

Definice 4. *Graf G je* chordální*, pokud neobsahuje kružnici délky ≥ 4 jako indukovaný podgraf.*

Definice 5. *Vrchol $v \in V(G)$ je* simpliciální*, pokud množina všech jeho sousedů indukuje kliku v G.*

Definice 6. Perfektní eliminační schéma (PES) *grafu G je uspořádání vrcholů vrcholů G do posloupnosti $v_1, \ldots, v_n$ takové, že pro každé $i \in [n]$ platí, že sousedi v_i mezi vrcholy $v_1, \ldots, v_{i-1}$ tvoří kliku v G.*

2.1 Příklady

Příklad 6. Graf G je *průnikový graf podstromů*, jestliže existuje strom T a funkce η přiřazující každému vrcholu G (souvislý a neprázdný) podstrom stromu T tak, že každé dva vrcholy u a v tvoří hranu G právě když $\eta(u) \cap \eta(v) \neq \emptyset$. Ukažte, že každý průnikový graf podstromů je chordální.

Příklad 7. Ukažte, že každý chordální graf je průnikový graf podstromů nějakého stromu.
(hint: Postupujte indukcí. Přidávejte simpliciální vrchol.)