

# Kombinatorika a Grafy 2 - Cvičení 8

Jan Soukup

10.4.2024

<https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2324/KAG2/>

## 1 Perfektní grafy

### 1.1 Opakování

**Definice 1.**  $G$  je perfektní, jestliže pro každý indukovaný podgraf  $H$  grafu  $G$  platí

$$\chi(H) = \omega(H).$$

## 2 Příklady

**Příklad 1.** Ukažte, že doplněk liché kružnice na alespoň pěti vrcholech, tedy  $\overline{C_{2k+1}}$  pro  $k \geq 2$ , není perfektní a speciálně má větší barevnost  $\chi$  než klikovost  $\omega$ . (barevnost jsme počítali už na předchozím cvičení).

**Příklad 2.** Split graf je takový graf, v němž lze rozdělit vrcholy na dvě části  $K$  a  $N$ , přičemž  $K$  tvoří kliku a  $N$  nezávislou množinu (hrany mezi  $K$  a  $N$  mohou být libovolné) – ukažte, že takové grafy jsou perfektní.

**Příklad 3** (bylo částečně na přednášce). Dokažte, že v libovolném perfektním grafu existuje RoNeMno (Rozsáhlá nezávislá množina), tedy nezávislá množina protínající všechny kliky v  $G$  velikosti  $\omega(G)$  (čili obsahuje alespoň jeden vrchol z každé největší kliky). Jak zajistit, aby nalezené RoNeMno obsahovalo předepsaný vrchol?

**Příklad 4.** Mějme  $G$  takový, že každý jeho indukovaný podgraf má RoNeMno. Ukažte, že  $G$  je perfektní.

**Příklad 5.** Nechť  $G$  je graf a  $v$  jeho vrchol. Buď  $H$  graf, v němž nahradíme  $v$  klikou, přičemž vrcholy v klice mají stejné sousedy mimo kliku jako mělo  $v$ . Ukažte, že  $G$  je perfektní právě tehdy, když  $H$  je perfektní.

(Hint: Pro těžší implikaci se hodí využít předchozí dvě cvičení)

**Příklad 6.** Ukažte, že doplňky bipartitních grafů jsou perfektní. (Rozmyslete si, že to plyne skoro hned ze slabé věty o perfektních grafech a pak to zkuste dokázat bez ní).

(hint: Rozmyslete si čemu odpovídají maximální barevné třídy a aplikujte Königovu větu, tedy že velikost nejmenšího vrcholového pokrytí v bipartitním grafu je rovna velikosti největšího párování. Případně to půjde i indukci.)

**Příklad 7.** Bez použití slabé (nebo silné) věty o perfektních grafech dokažte, že je-li  $L(G)$  linegraf bipartitního grafu  $G$ , pak  $\overline{L(G)}$  je perfektní. (Hint: zase se hodí Königova věta)