Kombinatorika a Grafy 2 - Cvičení 8.5

Jan Soukup

10.4.2024
https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2324/KAG2/

1 Perfektní a chordální grafy

1.1 Opakování

Definice 1. *G je* perfektní*, jestliže pro každý indukovaný podgraf H grafu G platí*

$$\chi(H) = \omega(H).$$

Lemma 1. V libovolném perfektním grafu existuje RoNeMno (Rozsáhlá nezávislá množina), tedy nezávislá množina protínající všechny kliky v G velikosti $\omega(G)$ (čili obsahuje alespoň jeden vrchol z každé největší kliky). Navíc existuje RoNeMno obsahující libovolný předepsaný vrchol.

Lemma 2. Mějme G takový, že každý jeho indukovaný podgraf má RoNeMno. Pak G je perfektní.

Definice 2. *Graf G je* chordální*, pokud neobsahuje kružnici délky ≥ 4 jako indukovaný podgraf.*

Definice 3. *Vrchol $v \in V(G)$ je* simpliciální*, pokud množina všech jeho sousedů indukuje kliku v G.*

Definice 4. Perfektní eliminační schéma (PES) *grafu G je uspořádání vrcholů vrcholů G do posloupnosti $v_1, \ldots, v_n$ takové, že pro každé $i \in [n]$ platí, že sousedi v_i mezi vrcholy $v_1, \ldots, v_{i-1}$ tvoří kliku v G.*

2 Příklady

Příklad 1. Nechť G je graf a v jeho vrchol. Buď H graf, v němž nahradíme v klikou, přičemž vrcholy v klice mají stejné sousedy mimo kliku jako mělo v. Ukažte, že G je perfektní právě tehdy, když H je perfektní.

(Hint: Pro těžší implikaci se hodí využít předchozí dvě cvičení)

Příklad 2. Ukažte, že doplňky bipartitních grafů jsou perfektní. (Rozmyslete si, že to plyne skoro hned ze slabé věty o perfektních grafech a pak to zkuste dokázat bez ní).

(hint: Rozmyslete si čemu odpovídají maximální barevné třídy a aplikujte Königovu větu, tedy že velikost nejmenšího vrcholového pokrytí v bipartitním grafu je rovna velikosti největšího párování. Případně to půjde i indukcí.)

Příklad 3. Chordální grafy jsou grafy bez indukovaných cyklů délky ≥ 4. Rozmyslete si jak vypadají grafy bez bez ~~indukovaných~~ cyklů délky ≥ 4.

Příklad 4. Ukažte, že chordální graf na n vrcholech má nejvýš n maximálních klik (obecně si rozmyslete, že graf jich může mít až exponenciálně mnoho).

Příklad 5. Z přednášky víte, že pokud je souvislý graf chordální, tak je každý minimální řez klika. Ukažte, že opak neplatí. Tedy najděte příklad souvislého grafu G, jehož každý minimální řez je klika, ale G není chordální.

Příklad 6. Graf G je *průnikový graf podstromů*, jestliže existuje strom T a funkce η přiřazující každému vrcholu G (souvislý a neprázdný) podstrom stromu T tak, že každé dva vrcholy u a v tvoří hranu G právě když $\eta(u) \cap \eta(v) \neq \emptyset$. Ukažte, že každý průnikový graf podstromů je chordální.

Příklad 7. Ukažte, že každý chordální graf je průnikový graf podstromů nějakého stromu.
(hint: Postupujte indukcí. Přidávejte simpliciální vrchol.)

3 Když zbyde čas

Příklad 8. Bez použití slabé (nebo silné) věty o perfektních grafech dokažte, že je-li $L(G)$ linegraf bipartitního grafu G, pak $\overline{L(G)}$ je perfektní. (Hint:zase se hodí Königova věta)