Kombinatorika a Grafy 2 - Cvičení 7

Jan Soukup

8.4.2024
https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2324/KAG2/

1 Hranová barevnost a perfektní grafy

1.1 Opakování

Definice 1. *Hranové k-barvení grafu G je barvení $p: E(G) \to \{1, \ldots, k\}$ takové, že $\forall e \neq f \in E(G), e \cap f \neq \emptyset: p(e) \neq p(f)$.*

Definice 2. *Hranová barvenost grafu G, značena $\chi'(G)$, je nejmenší k, takové, že existuje hranové k-obarvení grafu G.*

Tvrzení 1 (Vizingova věta)**.** Pro každý graf G platí $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Definice 3. *G je* perfektní*, jestliže pro každý indukovaný podgraf H grafu G platí*

$$\chi(H) = \omega(H).$$

1.2 Příklady na barvení

Příklad 1. Dokažte, že bipartitní graf G lze hranově obarvit $\Delta(G)$ barvami, tedy $\chi'(G) \leq \Delta(G)$. (Hint: zkuste neprve předpokládat, že G je d-regulární.)

Příklad 2. Nalezněte nekonečnou množinu hranově 3-souvislých kubických (tedy 3-regulárních) grafů G_n s $\chi'(G_n) = 4$. (Hint: nejprve najděte jeden takový graf a pak vymyslete, jak ho zvětšovat.)

2 Příklady na perfektní grafy

Příklad 3. Ukažte, že doplněk liché kružnice na alespoň pěti vrcholech, tedy $\overline{C_{2k+1}}$ pro $k \geq 2$, není perfektní a speciálně má větší barevnost χ než klikovost ω. (barevnost jsme počítali už na předchozím cvičení).

Příklad 4 (bylo částečně na přednášce)**.** Dokažte, že v libovolném perfektním grafu existuje RoNeMno (Rozsáhlá nezávislá množina), tedy nezávislá množina protínající všechny kliky v G velikosti $\omega(G)$ (čili obsahuje alespoň jeden vrchol z každé největší kliky). Jak zajistit, aby nalezené RoNeMno obsahovalo předepsaný vrchol?

Příklad 5. Mějme G takový, že každý jeho indukovaný podgraf má RoNeMno. Ukažte, že G je perfektní.

Příklad 6. Nechť G je graf a v jeho vrchol. Buď H graf, v němž nahradíme v klikou, přičemž vrcholy v klice mají stejné sousedy mimo kliku jako mělo v. Ukažte, že G je perfektní právě tehdy, když H je perfektní.

(Hint: Pro těžší implikaci se hodí využít předchozí dvě cvičení)

3 Když se budete nudit

Příklad 7. *Duální graf* G^* rovinného grafu G je graf, kde vrcholy jsou stěny G a hrana v G^* vede mezi dvěma stěnami, pokud tyto stěny sdílejí hranu. Nechť G je hranově 2-souvislý 3-regulární graf nakreslený v rovině. Z věty o čtyřech barvách je duální graf G^* ke G vrcholově 4-obarvitelný. Ukažte, že z toho plyne, že G má hranovou barevnost 3.

Příklad 8. Nechť G je triangulace roviny (tedy každá stěna je trojúhelník). Mějme duální graf G^* a předpokládejme, že je hranově obarvený třemi barvami, tedy $\chi'(G^*) \leq 3$. Ukažte, že vrcholy G lze obarvit čtyřmi barvami.

Z posledních dvou příkladů zkuste zformulovat tvrzení o hranovém obarvení, které je ekvivalentní větě o čtyřech barvách.

Příklad 9. Dokažte, že pokud G je 3-regulární graf obsahující hamiltonskou kružnici, tak $\chi'(G) = 3$.

Příklad 10. Dokažte, že pokud G je 3-regulární graf obsahující most, pak $\chi'(G) = 4$.