

# Kombinatorika a Grafy 2 - Cvičení 6

Jan Soukup

25-27.3.2024

<https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2324/KAG2/>

## 1 Hranová a vrcholová barevnost

### 1.1 Opakování

**Tvrzení 1** (Brooksova věta). Pro každý souvislý graf  $G$  který není klika ani lichý cyklus platí  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ .

**Definice 1.** Hranové  $k$ -barvení grafu  $G$  je barvení  $p : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$  takové, že  $\forall e \neq f \in E(G), e \cap f \neq \emptyset : p(e) \neq p(f)$ .

**Definice 2.** Hranová barvenost grafu  $G$ , značena  $\chi'(G)$ , je nejmenší  $k$ , takové, že existuje hranové  $k$ -obarvení grafu  $G$ .

**Tvrzení 2** (Vizingova věta). Pro každý graf  $G$  platí  $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ .

### 1.2 Příklady

**Příklad 0.** Pro každé dostatečně velké  $n$  najděte příklad grafu na  $n$  vrcholech s malou (konstantní) barevností ale velkým maximálním stupněm. Tedy si rozmyslete, že Brooksův odhad rozhodně není těsný pro všechny grafy.

**Příklad 1.** Dokažte, že každý graf  $G$  má alespoň  $\binom{\chi(G)}{2}$  hran.

**Příklad 2.** Dokažte, že pro každý graf  $G$  na  $n$  vrcholech platí  $\chi(G) \geq n/\alpha(G)$ , kde  $\alpha(G)$  označuje velikost největší nezávislé množiny grafu  $G$ .

**Příklad 3.** Pro  $n \geq 4$ , určete barevnost doplňku grafu  $C_n$ .

**Příklad 4.** Dokažte, že pro každý graf  $G$  na  $n$  hranách platí  $\chi'(G) \geq n/p(G)$ , kde  $p(G)$  velikost největšího párování grafu  $G$ .

**Příklad 5.** Dokažte, že pro každý graf  $G$  platí  $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq 2\Delta(G) - 1$ .

**Příklad 6.** Ukažte, že pokud má  $d$ -regulární graf hranové  $d$ -obarvení, pak má i perfektní párování.

**Příklad 7.** Jaká je hranová barevnost kliky  $K_n$ ? (Hint: Řešte pro sudá a lichá  $n$  zvlášť).

**Příklad 8.** Dokažte, že bipartitní graf  $G$  lze hranově obarvit  $\Delta(G)$  barvami, tedy  $\chi'(G) \leq \Delta(G)$ . (Hint: zkuste neprve předpokládat, že  $G$  je  $d$ -regulární.)

**Příklad 9.** Nalezněte nekonečnou množinu hranově 3-souvislých kubických (tedy 3-regulárních) grafů  $G_n$  s  $\chi'(G_n) = 4$ . (Hint: nejprve najděte jeden takový graf a pak vymyslete, jak ho zvětšovat.)