Kombinatorika a Grafy 2 - Cvičení 5

Jan Soukup

18-20.3.2024
https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2324/KAG2/

1 Grafy na plochách

1.1 Opakování

Tvrzení 1. Každá plocha je homeomorfní nějaké ploše vniklé ze sféry buďto přidáním křížítek a nebo uší.

Definice 1. *Eulerovský rod* $g(\Sigma)$ *plochy* Σ *vzniklé přidáním* k *křižítek a* u *uch na sféru je*

$$g(\Sigma) := k + 2u.$$

Definice 2. *Eulerovská charakteristika* $\mathrm{ec}(\Sigma) = 2 - g(\Sigma)$.

Plocha	Eulerovský rod	Eulerovská charakteristika
sféra Σ_0	0	2
projektivní rovina Π_1	1	1
torus Σ_1	2	0
Kleinova láhev Π_2	2	0
double-torus Σ_2	4	-2
Σ_u	$2u$	$2-2u$
Π_k	k	$2-k$

Tvrzení 2 (Zobecněná Eulerova formule)**.** Nechť G je nakreslený na ploše Σ. Pak

$$|E(G)| \leq |V(G)| + |F(G)| + g(\Sigma) - 2 = |V(G)| + |F(G)| - \mathrm{ec}(\Sigma).$$

Rovnost nastává právě když nakreslení G je *buňkové* (každá stěna je otevřený disk).

$$H(\Sigma) := \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 24g(\Sigma)}}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24\mathrm{ec}(\Sigma)}}{2} \right\rfloor$$

Tvrzení 3 (Heawoodova formule)**.** Každý graf nakreslený na ploše $\Sigma \neq \Sigma_0$ obsahuje vrchol stupně nejvýše $H(\Sigma) - 1$, a lze ho tedy obarvit $H(\Sigma)$ barvami.

2 Příklady

Příklad 1. Nakreslete K_6 na projektivní rovinu a K_7 na torus. Rozmyslete si co jsou stěny ve vašem nakreslení. Pomocí dalšího příkladu si rozmyslete, že větší kliky nakreslit nelze.

Příklad 2. Nechť G je nakreslený na ploše Γ a má alespoň 3 vrcholy. Ukažte, že ze zobecněné Eulerovy formule plyne

$$|E(G)| \leq 3|V(G)| - 3\mathrm{ec}(\Gamma),$$

kde rovnost nastane právě když je nakreslení buňková trinagulace. A jestliže G neobsahuje trojúhelník, pak $|E(G)| \leq 2|V(G)| - 2\mathrm{ec}(\Gamma)$.

Příklad 3. Ukažte, že nakreslení K_7 na torus je triangulace toru (tedy je buňkové a každá stěna je ohraničena trojúhelníkem v grafu).

Příklad 4. Zkuste nalézt alespoň dvě různá (nehomeomorfní, tedy nejdou na sebe převést deformacemi, či symetriemi plochy) nakreslení K_5 na toru.

Příklad 5. Ukažte, že přidáním „překrouceného“ ucha na sféru vznikne Kleinova láhev.

Příklad 6. Nalezněte graf, který lze nakreslit na torus tak, že má všechny stěny ohraničeny čtyřcyklem a přitom má barevnost tři. Dále najděte graf, který s barevností čtyři a nakreslením v projektivní rovině, jež má všechny stěny čtyřúhleníkové.

Příklad 7. Nakreslete Petersenův graf na projektivní rovinu a torus.

Příklad 8. Ukažte, že pokud máme na sféře křižítko, tak přidáním „překrouceného“ ucha dostaneme stejnou plochu jako přidáním ucha.