Kombonatorika a Grafy 2 - Příklady na procvičení minorů

Jan Soukup

https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2223/KAG2/

1 Minory

Definice 1. *Graf G obsahuje graf H jako minor, pokud H lze z G získat kontrakcemi hran a mazáním vrcholů a hran.*

G obsahuje H jako topologický minor, pokud G obsahuje podrozdělení H.

Definice 2. *Množina (třída) grafů $\mathcal{M}$ je uzavřená na minory pokud pro každý graf $G \in \mathcal{M}$ platí, že každý minor grafu G je také v $\mathcal{M}$.*

Příklad 1. Jsou následující třídy grafů uzavřené na minory? Nebo na topologické minory?

(1) Lesy (čili grafy bez kružnic)

(2) Grafy s maximální stupněm $\leq \Delta$ pro pevné Δ

(3) Grafy s průměrem $\leq D$ pro pevné D (průměr je největší vzdálenost mezi dvěma vrcholy)

Příklad 2 (Charakterizace tříd uzavřených na minory)**.** Ukažte, že třída grafů $\mathcal{F}$ je uzavřená na minory právě tehdy, když existuje (klidně nekonečná) množina grafů $\mathcal{H}$ taková, že

$$\mathcal{F} = \{G \,|\, \forall G' \preceq_m G : G' \notin \mathcal{H}\}\,.$$

(Na $\mathcal{H}$ se díváme jako na zakázanou množinu minorů, tedy žádný graf z $\mathcal{F}$ nesmí mít žádný minor, který by byl v $\mathcal{H}$). Například pro rovinné grafy by jsme mohli volit $\mathcal{H} = \{K_{3,3}, K_5\}$.

Tvrzení 1 (Věta navíc pro zajímavost)**.** třída grafů $\mathcal{F}$ je uzavřená na minory právě tehdy, když existuje konečná množina grafů $\mathcal{H}$ taková, že

$$\mathcal{F} = \{G \,|\, \forall G' \preceq_m G : G' \notin \mathcal{H}\}\,.$$

Nápověda

(1) (a) ano, ano
 (b) ne, ano
 (c) ne, ne

(2) „⇒“ Máme $\mathcal{F}$ uzavřenou na minory a zvolíme $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{F}}$. Ověříme, že to funguje. Tedy vážně $\mathcal{F} = \{G \mid \forall G' \preceq_m G : G' \notin \overline{\mathcal{F}}\}$.

„⇐“ Ověříme sporem, že taková množina je uzavřená na minory.