Kombinatorika a Grafy 2 - Cvičení 3

Jan Soukup

4-6.3.2024
https://kam.mff.cuni.cz/~soukup/vyuka/2324/KAG2/

1 Minory a rovinné grafy

Definice 1. *Graf G obsahuje graf H jako minor, pokud H lze z G získat kontrakcemi hran a mazáním vrcholů a hran.*

G obsahuje H jako topologický minor, pokud G obsahuje podrozdělení H.

Příklad 1. Ukažte, že K_5 ani $K_{3,3}$ (a tedy ani jejich podrozdělení) nejsou rovinné grafy.

Příklad 2 (Alternativní definice minoru)**.** Ukažte, že následující definice jsou ekvivalentní:

(1) H je minorem G, tedy $H \preceq_m G$, pokud lze (izomorfní kopii) H získat z G operacemi mazání vrcholů a hran a kontrakcemi hran.

(2) $H \preceq_m G$, pokud lze (izomorfní kopii) H získat z podgrafu G kontrakcemi hran (tedy nejprve budeme mazat a až potom dělat kontrakce).

(3) $H \preceq_m G$, pokud v G existují navzájem disjunktní podmnožiny vrcholů $\{X_v\}_{v \in V(H)}$ takové, že $G[X_v]$ jsou souvislý a pokud $uv \in E(H)$, pak existuje hrana mezi X_u a X_v.

Příklad 3. Nechť maximální stupeň H splňuje $\Delta(H) \leq 3$. Jestliže $H \preceq_m G$, pak G obsahuje podrozdělení H, tedy $H \preceq_t G$. (Speciálně: pokud $K_{3,3} \preceq_m G$, pak $K_{3,3} \preceq_t G$.)

Příklad 4. Najděte graf obsahující K_5 jako minor, ale ne jako topologický minor (tedy G neobsahuje podrozdělení K_5 jako podgraf).

Příklad 5. Ukažte, že jestliže $K_5 \preceq_m G$, pak G obsahuje podrozdělení K_5 nebo $K_{3,3}$.

Příklad 6 (možná bylo na hodině)**.** Nechť G_1, G_2 jsou grafy na alespoň 3 vrcholech, $G = G_1 \cup G_2$ je vrcholově 2-souvislý a $V(G_1 \cap G_2) = \{u, v\}$. Ukažte, že:

(1) $G_1 + uv$ je minor G.

(2) Jsou-li grafy $G_1 + uv$ a $G_2 + uv$ rovinné, pak G je rovinný. (Můžete použít následující fakt: Pokud G je 2-souvislý a rovinný, pak pro každou hranu e existuje nakreslení, které má e na vnější stěně.)

Příklad 7. Dokažte, že graf je vnějškově rovinný právě tehdy, když neobsahuje podrozdělení K_4 ani $K_{2,3}$ jako podgraf. (Graf je vnějškově rovinný, pokud má rovinné nakreslení takové, že všechny vrcholy jsou incidentní s vnější stěnou).